

Den gode stemning

Veltemperering af keyboard, ørets fysik og tonal musikalitet

Af Jens Ulrik Lefmann, Birkerød Gymnasium og DTU

Vores forståelse af sammenhængen mellem musik, matematik og naturvidenskab starter hos Pytagoras: Med vore øjne ser vi stjerner og planeter, og med vore ører sanser vi sfærernes musik. I matematikken åbenbarer sig en understrøm af mystik, og gennem den får mennesket indsigt i universet. Rene toneintervaller forbindes med universelle talforhold, konsonans mellem toner forstås som en sansning af selve matematikken, som forbinder menneskets psyke med kosmos.

I dag ved vi, at der ikke er lyd i det tomme rum, og med noget mindre patos forstår vi sansning af konsonans mellem toner som en del af ørets fysik. Jeg vil diskutere *placeteorien* for sansning af tonehøjde i det indre øres cochlea (sneglen) og den rolle, som den harmoniske forvrængning, der foregår i mellemørets knogler, spiller, i lyset af nogle mindre kendte eksperimenter, man selv kan udføre. Disse forsøg kan afdække rollefordelingen mellem ørets fysik og hjernen; hvad sker der før og efter ”digitaliseringen” af det analoge lydssignal på vejen frem til vores bevidsthed? Jeg vil omtale, hvordan man kan fremkalde akut *diplacisis binauralis*¹ og hvilke konsekvenser, det får for forståelsen af tonal musikalitet.

I lyset af en moderne forståelse af tonehøjdesansning vil jeg beskrive nogle tonale træk af den vestlige verdens musik. Fra renæssancen udvikler den europæiske musik sig fra at være udpræget melodisk og rytmisk i sin karakter til også at benytte harmoniske virkemidler. Flerstemmighed og treklange med tertser træder ind og afløser middelalderens kvinter og kvarter. Dette går hånd i hånd med indførelse af nye stemninger for keyboard. *Middeltonestemning* afløser pytagoræisk stemning og tilgodeser således en forskønnelse af durtreklange. Antallet af tonearter og akkorder er dog begrænset til det halve af det, vi råder over i dag. Senere i barokken går man over til klassiske, *veltempererede* stemninger, som tillader brug af alle tonearter. Indbyrdes er disse *klassiske* tempereringer ret beslægtede. Til gengæld adskiller de sig væsentligt fra den *moderne, ligesvævende* temperering. Anvendelsen af de klassiske tempereringer strækker sig helt frem til omkring år 1900, hvor den moderne, ligesvævende stemning bliver standard. En forståelse af de klassiske tempereringers fælles karaktertræk kan give ny forståelse af grundlaget for den klassiske musiks virkemidler og følelsesmæssige tilknytning til tonearter.

Det er en misforståelse at tro, at man i forbindelse med tilblivelsen af J. S. Bachs *Das Wohltemperierte Klavier* (WTK) fra 1722 (bind 2 fra 1742) havde indført den moderne, ligesvævende stemning for keyboard. Det er også en udbredt opfattelse, at de stemninger, man anvendte dengang, var ufuldkomne forsøg på at nå frem til at mestre den moderne, ligesvævende stemning. Tværtimod fastholdt man helt op til slutningen af det nittende århundrede klassiske tempereringer ([7], Introduction), som gjorde alle tonearterne *anvendelige*, men *forskellige*. Man møder også den opfattelse, at Bach med WTK1+2 ville vise, at alle 24 tonearter var ”lige gode”, men tværtimod udstiller værket tonearternes forskelligheder som musikalsk ”grundstof”. Kun få kender i dag lyden af de oprindelige tempereringer, men i digitalklaverets tidsalder kan vi igen så let som at trykke på en knap komme til at lytte os ind i tonearterne, som de fremstod op gennem det 18. og det 19. århundrede. Fx fremstod tonearter med få fortegn særligt *harmoniske*, mens tonearter med mange fortegn var særligt *melodiske*. Hver toneart fik sin helt egen karakter, og komponisters valg af toneart var lige så bevidste som en billedkunstners valg mellem granit, marmor eller bronze. Hvis man ikke har hørt fx Bach, Mozart eller Beethoven fremført med de stemninger, de er skabt i, svarer det til kun at have set fotos af Michelangelos Maria. Eller tro, hun var støbt i hvid akryl i

¹ *Diplacisis binauralis* er en tilstand, hvor den samme tone opleves som to forskellige toner alt efter hvilket øre den sanses gennem.

stedet for hugget ud af marmor. I den længere version [8] vises, hvordan Bach netop arbejder med tonearternes forskellighed og hvordan fx Mozart og Beethoven skifter mellem tonearter og bevidst fremkalder farvekontraster, der blegner i vores moderne, ligesvævende stemning ([4], side 73).

Musiklivet er i vor tid mere historisk orienteret end nogensinde. Næppe tidligere har musikere specialiseret sig i at spille ældre musik i det omfang, vi kender i dag. Det er uomgængeligt, at man ved fremførelse, fortolkning og oplevelse af ældre musik må forholde sig til den kløft som udstrækkes mellem nutid og musikkens tilblivelse. Den historiske kikkert kan forvrænge, forstærke, overse eller fremhæve på godt og ondt. Op gennem det tyvende århundrede er den klassiske musik blevet fortolket med tykke, senromantiske briller. Siden har *Early Music* bevægelsen tilbageerobret musikken med sin overbevisende slanke lyd, adrætte tempobehandling og artikulation. Her har ny fremførelsespraksis sammen med klassisk temperering tilmed givet farverne tilbage til den grånende, klassiske musik.

Terminologi. Jeg benytter navnet B for tonen H og Bb i stedet for B. *Lysere* tone betyder højere frekvens, *mørkere* tone betyder lavere frekvens. Med mindre andet nævnes, bruges ordet *terts* i betydningen durterts eller stor tert, altså fire halvtonetrin (i modsætning til molterts eller lille tert, som er tre halvtonetrin). *Klassisk musik* betegner den europæiske musik fra perioden 1700 - 1900 (fra midt i barokken til senromantik og impressionisme). *Keyboard* anvendes som fællesbetegnelse for alle tasteinstrumenter som clavecin, clavichord, virginal, spinet, cembalo, hammerklaver, harmonium, orgel, klaver, flygel, og digitalklaver. (Ikke mindst som en hyldest til det moderne digitalklaver, der med få klik kan skifte mellem de 7-8 vigtigste historiske stemninger og dermed giver let adgang til at lytte og sammenligne). *Diatonisk skala* betyder en skala med hel- og halvtonetrin i rækkefølgen 1-1-½-1-1-1-½. Hvis man starter på C, består skalaen blot af de hvide tangenter CDEFGABC.

Frekvensforhold, stamtone. For to toner er det alene frekvensforholdet $x = f_2 / f_1$ som er bestemmende for hvilket interval, vi oplever mellem tonerne. To andre toner med samme frekvensforhold opfattes altså som samme interval. At vores tonesansning fungerer sådan, er i sig selv en kilde til undren, se senere artikel i KVANT eller [8]. Samtidig er det jo forklaringen på, at man kan høre en melodi i først én toneart og derefter i en anden toneart - og alligevel opfatte det som samme melodi! Når en tones frekvens fordobles sanser vi tonen oktaven over. Den nye tone opleves så beslægtet med den første, at vi ligefrem giver den samme navn (det dybe C, det høje C etc.). Det er i sig selv et tankevækkende forhold, der tages op senere [8]

To positive tal x og y kaldes ækvivalente (eller oktavækvivalente), dersom $y = 2^n x$ for et passende helt tal n . Vi giver toner samme navn netop hvis deres frekvensfaktorer er ækvivalente, fx kalder vi alle toner med frekvenserne 55 Hz, 220 Hz, 440 Hz og 1760 Hz for A. Enhver af disse toner siges at være en repræsentant for *stamtönen* A, idet vi ved en *stamtone* forstår vi en klasse af ækvivalente toner.

Den moderne stemning. Vores tonesystem er i dag indrettet sådan, at en oktav er inddelt i 12 lige store trin, kaldet halvtonetrin. Man møder tit spørgsmålet om, hvorfor man har valgt at inddele en oktav i netop 12 trin. Man kunne jo vælge at inddele oktaven i q trin, så hvert trin får en frekvensfaktor $2^{1/q}$. For at opnå en god tilnærmelse til $3/2$ med p af sådanne trin, skal $2^{p/q}$ være tæt på $3/2$. Med andre ord skal p/q være tæt på $\log(3/2)/\log(2)$. Nu er $p/q = 7/12$ et godt bud; den relative afvigelse ca. $-2,8 \cdot 10^{-3}$. Man kan så prøve med et større tal i nævneren for at se, om man kan komme tættere på med et passende valg af tæller. Det viser sig at ingen brøker giver bedre tilnærmelse før man kommer op på $q = 41$. Først når vi kommer til tallet $24/41$, får vi en bedre

tilnærmelse til $\log(3/2)/\log(2)$. Den relative afvigelse er nu nede på ca. $6,9 \cdot 10^{-4}$. Det betyder, at man skal inddеле oktaven i 41 trin, og derefter bruge 24 trin som kvinten for at få en bedre tilnærmelse end før. Nu er *kædebrøksalgoritmen* en særdeles effektiv metode til at beregne den optimale rationale talfølge af *kædebrøkskonvergenter* ([11] s. 20 eller [6] kapitlet "Continued fractions"). Jeg anfører et par af talfølgens elementer

$$\left(\frac{p_n}{q_n} \right)_n = \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \dots \rightarrow \frac{\log(3/2)}{\log 2}$$

Kædebrøksalgoritmen

For ethvert irrationalt tal ξ_0 kan vi konstruere en uendelig kædebrøk med dette tal som grænseværdi. Konstruktionen foregår ved *kædebrøksalgoritmen*: Først defineres en følge af irrationale tal rekursivt ved

$$\xi_{n+1} = \frac{1}{\xi_n - [\xi_n]}.$$

Her betyder $[x]$ heltalsdelen af x . (At alle talfølgens elementer er irrationale ses umiddelbart ved induktion). Danner man nu følgen af heltalsværdierne $a_n = [\xi_n]$, får man en ny følge af de såkaldte *kædebrøksnævner*. Disse indgår nu i definitionen af en ny rational talfølge af de såkaldte *kædebrøkskonvergenter* p_n / q_n

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} = [a_0; a_1; a_2; \dots; a_n]$$

Denne rationale talfølge $\left(\frac{p_n}{q_n} \right)_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$ kaldes *kædebrøken* for ξ_0 . Dens

grænseværdi er ξ_0 (se Asmus [])

$$\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \xi_0 \text{ for } n \rightarrow \infty.$$

Den er *optimal* i den forstand, som det udtrykkes af følgende sætning:

For alle rationale tal $\frac{p}{q}$ med $q \in \{1, 2, 3, \dots, q_n\}$ og $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ gælder

$$\left| \xi_0 - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| \xi_0 - \frac{p}{q} \right|$$

Bevis: Se [8] side 182.

Sætningen siger: Blandt alle rationale tal med begrænset nævner vil kædebrøkskonvergenten med den højeste nævner være den bedste tilnærmelse til ξ_0 .

Hvad vil det egentlig sige, at en rational talfølge er optimal?: Lad ξ_0 være et irrationalt tal. For at tilnærme det, lægger vi et "net" ud af alle rationale tal med nævner q : For det naturlige tal q , lad $p = p(q)$ være det entydigt bestemte hele tal, for hvilket den relative afvigelse

$$\left| \frac{\xi_0 - \frac{p}{q}}{\frac{1}{q}} \right| = |q\xi_0 - p|$$

er mindst. (Den relative afvigelse er den absolutte afvigelse i forhold til ”maskestørrelsen” $1/q$) Sæt nu

$$\sigma_q = |q\xi_0 - p(q)|$$

Der gælder så $\sigma_q < \frac{1}{q}$ (endda $\sigma_q \leq \frac{1}{\sqrt{5}q}$ ifølge Hurwitz’ sætning [8] s. 184)) og derfor går mod nul

for $q \rightarrow \infty$, kan vi danne en følge, hvor $q_1 = 1$; Lad $q_2 > q_1$ være det første tal, for hvilket $\sigma_{q_2} < \sigma_{q_1}$. Lad herefter $q_3 > q_2$ være det første tal, for hvilket $\sigma_{q_3} < \sigma_{q_2}$, osv. Herved får man

dannet en optimal talfølge $\frac{p(q_n)}{q_n}$. Denne følge er identisk med følgen af kædebrøkskonvergener.

Det irrationale² tal $\xi_0 = \log(3/2)/\log(2)$ har kædebrøksudviklingen

$$\xi_0 = \frac{\log(3/2)}{\log(2)} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

Konvergenerne nummer 4 og 5 er

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{7}{12} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}, \text{ og } \frac{p_5}{q_5} = \frac{24}{41} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}}$$

Fordelen ved at vælge 12-deling er, at alle trinnene er anvendelige, selv om de ikke bliver helt rene. Med 41 trin i en skala eller flere ville det nok blive svært at få børnene i gang på klaveret. Som kuriosum nævnes, at samme teknik giver ”optimal” rational talfølge, der går mod π

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \dots \rightarrow \pi$$

hvor de fire første led var kendt af Arkimedes.

Heldigvis giver vores valg af 12 trin, at alle toneintervallerne ligger tæt på de klassiske, rene (forstørrede/ formindskede) intervaller, hvorimod anvendelse af 41 trin kan give os en endnu renere kvint i 24 trin, men til gengæld også et fuldstændig uoverskueligt klaviatur med en lang række

² Det vises på side 7 at $\log(3/2)/\log(2)$ er irrational

meget fremmede intervaller. Ikke noget der just ville fremme et barns mod på klavertimer. (En yderligere forbedring fås først, når man vælger at inddele oktaven i 53 trin. Næste skridt er 306 trin - ikke nogen attraktivt vej at bevæge sig ud ad!). Disse overvejelser viser, at antallet næppe kunne være anderledes end 12, men det er naturligvis ikke den historiske baggrund for vores toneskalaers tilblivelse og ligger ikke til grund for valget af 12.

Oktaven over en tone har frekvensfaktoren 2. Hvis man lader x betegne frekvensfaktoren for ethvert halvtoneinterval, får vi ligningen $x^{12} = 2$, som har løsningen $x = 2^{1/12}$. Dette irrationale tal er *ikke konstruerbart* i euklidisk geometrisk forstand. Beslægtet hermed er det klassiske – og uløselige problem om terningens fordobling; tallet $x^4 = 2^{1/3}$ er jo netop frekvensfaktoren for en terts. Det har i musikhistorien givet spekulationer over, hvordan man for en lut eller en guitar i praksis skulle anviser en tilnærmet geometrisk konstruktion af gribebrættets inddeling i bånd ([2] s. 49-55). Det klassiske problem om umuligheden af at konstruere sidelængden for en terning med det dobbelte rumfang af en given terning er beskrevet i [10] og [5].

Toneafstand i cent. Man har indført et logaritmisk afstandsmål for toner, sådan at et halvtoneinterval måler 100 cent i den moderne stemning. En moderne terts er 400 cent, en moderne kvint er 700 cent og en oktav er 1200 cent. Afstanden i cent mellem to toner med frekvenser f_1 og f_2 er givet ved formlen

$$I(1,2) = 1200 \text{ cent} \cdot \log_2(x) = 1200 \text{ cent} \cdot \frac{\log x}{\log 2}$$

hvor $x = f_2 / f_1$ er frekvensforholdet. Når det drejer sig om stamtoner, kan man regne modulo 1200 cent. Således svarer to kvinter til $700 + 700 = 1400 \equiv 200$ cent, altså en heltone. Bemærk ang. formlen, at log kan være enhver logaritmefunktion.

Kvintskridt, pytagoræisk komma og syntonisk komma. Den rene kvint over en udgangstone har en frekvensfaktor $3/2$. Den pytagoræiske stemning fremkommer ved at stemme alle kvinter rene, idet man starter ved Eb og slutter ved G#. Undervejs har vi passeret alle tonerne FCGDAEB der svarer til klaverets hvide tangenter. Hvis blot vi holder os til at tale om stamtoner, kan vi lige så godt sige frekvensfaktor 3. Aritmetikkens fundamentalsætning fortæller, at ethvert rationalt på entydig måde kan opløses i primfaktorer. Derfor vil en potens af 3 aldrig også være en potens af 2, og derfor vil vi aldrig kunne komme tilbage til samme stamtone efter en række rene kvintskridt. Men med 12 rene kvintskridt kommer vi imidlertid tæt på, idet 3^{12} er tæt på 2^{19} . Hvis man starter med det dybeste A på klaveret som udgangstone, vil man efter 12 rene kvintskridt nå til en tone med frekvensfaktor $(3/2)^{12} \approx 129,7$; dette overskrider 7 rene oktaver $2^7 = 128$ med faktoren $(3/2)^{12} / 2^7$ svarende til 23,5 cent, det såkaldte *pytagoræiske komma*.

Den rene terts over en udgangstone har frekvensfaktoren $5/4$, eller slet og ret 5, hvis vi blot taler om stamtoner. Nu giver fire rene kvintskridt en frekvensfaktor $3^4 = 81$, hvorimod den rene terts også har frekvensfaktoren $5 \cdot 2^4 = 80$. Det betyder, at toneintervallet fra den rene terts til den pytagoræiske terts har frekvensforholdet $81/80$. Dette interval kaldes det *syntoniske komma*. Det svarer til 21,5 cent og ligger tæt på det pytagoræiske komma. Det syntoniske komma er intervallet fra en ren terts til en pytagoræisk terts.

Den ekstremt lyse durterts i den pytagoræiske skala er hovedårsagen til, at den pytagoræiske skala ikke egner sig til flerstemmig musik, medmindre man holder sig fra tertser.

Lyt til det syntoniske komma på violin.

Normalt stemmes en violin i rene kvinter G, D, A og E. Hvis man med førstefinger på A-strengen spiller B (læs H!) og intonerer sådan, at den store sekst klinger helt rent i dobbeltgrebet DB, så vil man skulle intonere det mørkt. Hvis man med samme lave B spiller dobbeltgrebet BE, vil man opleve det falsk; nu skal B intoneres lysere for at klinge rent sammen med E. Forskellen på det mørke og det lyse B er netop et syntonisk komma.

Middeltonekvinten

I renæssancen kommer den polyfone gennembrud med *flerstemmighed* og harmoniske virkemidler. Man får derfor smag for den rene terts $5/4$, som er væsentligt lavere end den pythagoræiske terts $81/64$. ([4] s. 19-45). Man indfører en ny stemning, hvor kvinten formindske sådan, at fire på hinanden følgende kvinter nu skal give en ren terts. Det fører til ligningen $x^4 = 5$, hvor løsningen $x = 5^{1/4} \approx 1,495$ er frekvensfaktoren for denne nye kvint. Indførelsen af denne irrationale frekvensfaktor er første skridt på vej ned fra antikkens guddommelige idealer (de rationale brøker) for med irrationale tal at tilgodese menneskets sanseverden. Se boks 1.

Middeltonekvint $5^{1/4} \approx 1,495$: $I(C, G) = 1200 \cdot \log_2(5^{1/4}) \approx 697$ cent
 Moderne kvint $2^{7/12} \approx 1,498$: $I(C, G) = 1200 \cdot \log_2(2^{7/12}) = 700$ cent
 Pythagoræisk, **ren** kvint $3/2$: $I(C, G) = 1200 \cdot \log_2(3/2) \approx 702$ cent

Boks 1. Afvigelserne mellem kvinterne holder sig beskedent inden for 5 cent. Selv et musikalsk trænet øre affinder sig fint med den lave middeltonekvint i bytte for den rene terts i en durtreklang.

Kvinterne afviger i sig selv ikke så meget, men til gengæld bliver der store afvigelser for tertserne, idet en terts jo er fire på hinanden følgende kvinter, se boks 2. Fra Frederiksborg Slotskirke sælges Cd'er med musik spillet på Compeniusorglet fra 1610, som er stemt i middeltonestemning (oprindeligt et verdsligt kammerorgel til dansemusik).

Middeltone **ren** terts $5/4 = 1,25$: $I(C, E) = 1200 \cdot \log_2(5/4) \approx 386$ cent
 Moderne terts $2^{4/12} = \sqrt[3]{2} \approx 1,260$: $I(C, E) = 1200 \cdot \log_2(2^{4/12}) = 400$ cent
 Pythagoræisk terts $81/64 \approx 1,266$: $I(C, E) = 1200 \cdot \log_2(81/64) \approx 408$ cent

Boks 2. Mellem tertserne ser man altså langt større afvigelser, nemlig 21,5 cent (det syntoniske komma). Bemærk, hvor lav den rene terts er i forhold til den moderne terts!

Det er almindelig kendt, at musikere med baggrund i andre musiktraditioner tager afstand fra vores tonale system. Fx arbejder indiske musikere i langt højere grad med mikrotonalitet og rene intervaller. Tilvænning fra barnsben er nok den bedste vej til at acceptere den vestlige verdens moderne terts.

Den kromatiske cirkel.

Nu placerer vi tonerne i den kromatiske skala C, C#, D, Eb, E,... osv. på enhedscirklen, idet vi starter med C i (1,0) og går mod uret. Vi lader en hel omgang svare til 1200 cent, og derfor svarer en halvtone på 100 cent til 30 grader. I den moderne stemning danner tonerne en regulær 12-kant. En tone med frekvensfaktor x (i forhold til C) vil altså afbildes i punktet med retningsvinklen

$$\theta(x) = 360 \cdot \log_2(x).$$

Bemærk, at $2x$ afbildes i samme retningspunkt som x idet $\theta(2x) = \theta(x) + 360$. To toner afbildes i samme punkt, netop hvis de repræsenterer den samme stamtone.

Nu ser vi på, hvordan en uendelig bane af toner $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ placerer sig på cirklen. Vinklen mellem ét punkt og det følgende punkt er $360 \cdot \log_2(a)$. Hvis der forekommer gentagelser, altså hvis a^n og a^m afbildes i samme punkt, så må $a^n = a^m 2^k$ for et passende helt tal k . Det giver os $a = 2^{k/(n-m)}$ og dermed ser vi, at $\log_2(a) = k/(n-m)$ er et rationalt tal.

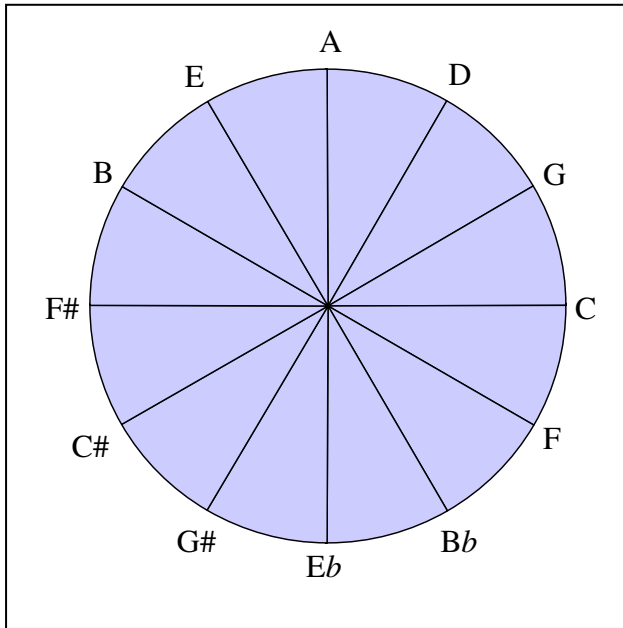
Der er nu to muligheder: Enten er $\log_2(a) = p/q$ et *rationalt* tal, altså $a = 2^{p/q}$. Banen vil da netop bestå af q forskellige punkter, der danner en regulær q -kant på cirklen (idet vi antager brøken p/q uforkortelig).

Den anden mulighed er, at $\log_2(a)$ er et *irrationalt* tal. I så fald vil alle banens punkter være forskellige. Disse uendelig mange punkter vil fordele sig tæt i den kromatiske cirkel, i den forstand at ethvert nok så lille buestykke vil indeholde uendelig mange af banens punkter. Et vigtigt "irrationalt" eksempel er sekvensen af pytagoræiske kvinter. Tallet $\log_2(3/2)$ er irrationalt; hvis man nemlig antog $\log_2(3/2) = p/q$, ville man få $3/2 = 2^{p/q}$, eller $3^q = 2^{p+q}$ i modstrid med aritmetikkens fundamentalsætning. Derfor ligger de pytagoræiske kvinter tæt, og vi kommer aldrig tilbage til samme stamtone. Et andet vigtigt eksempel er sekvensen af middeltonekvinter, som også vil ligge tæt, idet også $\log_2(5^{1/4})$ er et irrationalt tal (hvilket ses på tilsvarende måde).

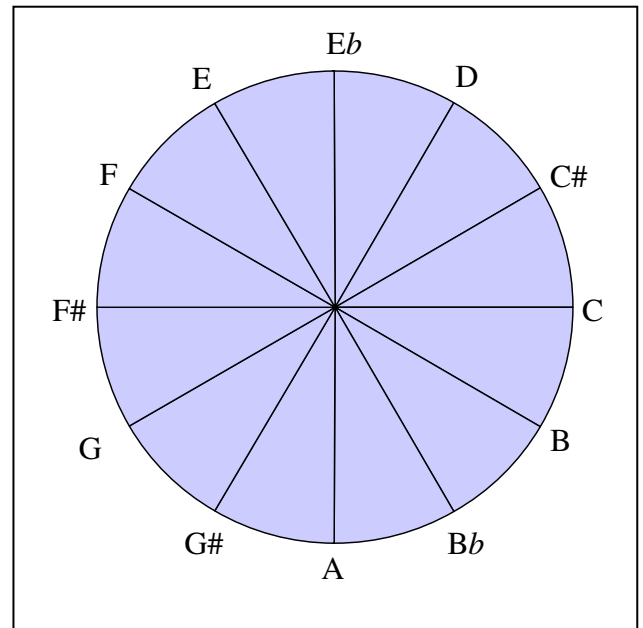
Symmetrier uden betydning. Læseren opfordres til at fortsætte med at gennemtænke tilfældene $a = 2^{p/12}$ for forskellige værdier af p (eller se [8]). Der fremkommer en række symmetriobjekter herunder heltoneskalaen (2 stk.), den formindskede firklange (3 stk.) og den forstørrede treklange (4 stk.) samt tritonusklangen (6 stk.), en række klange, der vel at mærke ikke har nogen central rolle i den klassiske musik. Og det er netop min pointe: Det er højst usædvanligt, at iøjnefaldende matematiske strukturer (som undergrupper og sideklasser i den cykliske gruppe modulo 12) ikke indtager nogen fremtrædende rolle. I den klassiske musik er det derimod de asymmetriske strukturer, som dur- og moltreklangene samt diatoniske skalaer, der har de centrale roller. Dette forhold antyder, at vores tonesystem og den klassiske musik er fremmede for hinanden. Vi vil da også se, at de fremmede symmetrier forsvinder, når vi vender blikket mod de klassiske stemninger. Anderledes er det naturligvis med senere musikstilarter, genrer som fx impressionisme (tænk fx på heltoneskalaer hos Debussy), tolvtonemusik og jazz, som er stærkt knyttet til den moderne stemning. Udviklingen af den moderne stemning finder sted samtidig med sådanne gennembrud samt den senromantiske frigørelse fra bundethed til enkelte tonearter ([7], Introduction).

Et kig på klaviaturet understreger også den fremtrædende betydning af asymmetriske figurer som fx opdelingen i hvide og sorte tangenter. Den diatoniske skala, som fx er givet ved de hvide tangenter startende fra C, består af heltone- og halvtonetrin $1-1-1/2-1-1-1/2$, se figur 9. Den pentatone skala er fx givet ved de sorte tangenter og har trinene $1-1/2-1-1-1/2-1$.

Kvintcirklen. Kvintcirklen fremkommer på tilsvarende måde ved at placere tonerne i kvintrækkefølgen C, G, D, A, E,... osv., idet vi nu lader en vinkel på 30 grader = $1/12$ omgang repræsentere 700 cent (i stedet for 100 cent). En hel omgang svarer nu til 8400 cent. I den moderne stemning danner tonerne igen en regulær 12-kant. Rækkefølgen er blot anderledes.



Figur 3. I den moderne stemning er alle kvinter på 700 Cent.



Figur 4. Alle halvtonespring i den moderne stemning er på 100 Cent.

Syv-reglen. Tænk på en elastik, der er viklet én gang omkring et paprør. Der er afsat 12 mærker med samme afstand på elastikken, så de danner en regulær 12-kant. Nu vikles elastikken i stedet 7 gange rundt om paprøret. De tolv mærker danner igen en regulær 12-kant; rækkefølgen er blot ændret. Nu vikles elastikken i stedet 49 gange rundt om paprøret. Mærkerne ligger nu igen i den oprindelige rækkefølge! Anvender vi nu dette på vore tonecirkler, kan vi formulere *syv-reglen*:

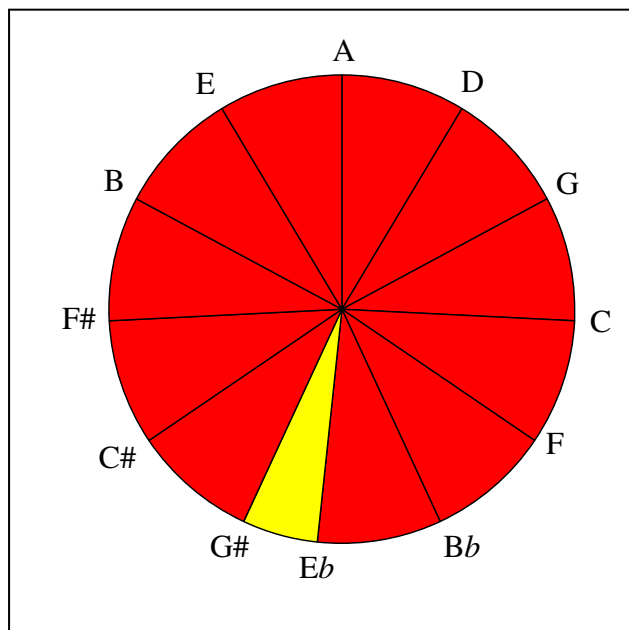
Transformationen "gå syv skridt frem" afbilder den kromatiske cirkel på kvintcirklen og omvendt: Hvis man går 7 skridt frem i den kromatiske cirkel, kommer man i alt en kvint op, fx (C, C#, D, Eb, E, F, F#, G). Det virker også den anden vej: Hvis man går 7 skridt frem i kvintcirklen, vil man ende en halv tone højere, fx (D, A, E, B, F#, C#, G#, Eb).

Matematisk set vil den komplekse funktion $f(z) = z^7$ multiplicere argumentet for det komplekse tal z med 7. Vi kan lade vores moderne 12 toner svare til de 12 komplekse enhedsrødder i $z^{12} = 1$. Anvender vi nu f to gange efter hinanden på sådan en enhedsrod, får vi

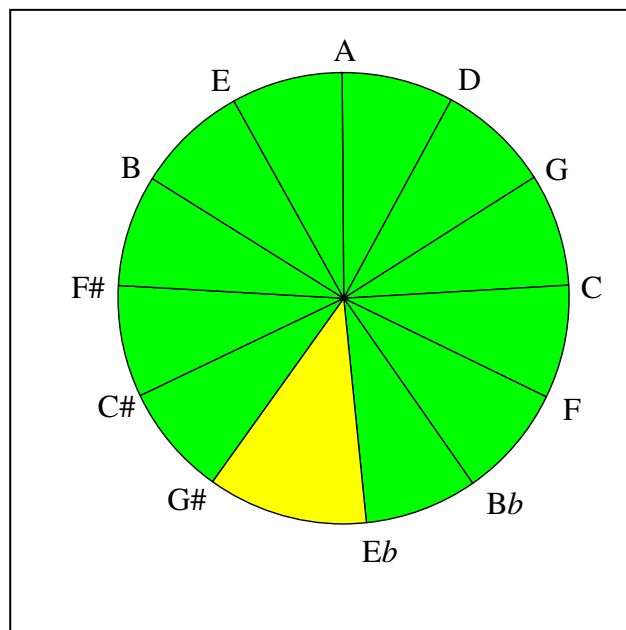
$$f(f(z)) = z^{49} = (z^{12})^4 \cdot z = z$$

dvs. enhedsrødderne er invariante under f^2 . Det bunder i at $7^2 \equiv 1 \pmod{12}$.

Fire-reglen. Hvis man går fire trin frem kommer man en terts op, og bemærk, at det er uanset om man bruger den kromatiske cirkel eller kvintcirklen. Det hænger sammen med, at for en enhedsrod til den komplekse ligning $z^{12} = 1$ vil $(z^7)^4 = z^4$.



Figur 5. I den pytagoræiske stemning vil de 11 rene kvinter på 702 cent kun levne plads til en lille ulvekvint på 678 cent



Figur 6. I middeltonestemningen vil de 11 kvinter på 697 cent skulle suppleres med en stor ulvekvint på 738 cent.

Den pytagoræiske stemning

Her er der elleve rene kvinter på 702 cent startende fra Eb, Bb, F, C, G, D, A, E, B, F#, C#, G#. Den resterende kvint G#Eb på kun 678 cent, der skulle slutte cirklen, er uacceptabelt lav. Den kaldes derfor "ulvekvinten". Se figur 2 (tv).

I C-dur bliver alle heltoneintervallerne på 204 cent, idet man skal gå to kvinter frem på figur 2 (tv): $702 + 702 = 1704 \equiv 204 \pmod{1200}$. Heltoneintervallerne CD, DE, FG, GA og AB er altså alle lidt større end vi bruger i dag. De to halvtone intervaller EF og BC er til gengæld lidt mindre, end i dag, nemlig kun 90 cent. Udregningen fremgår af at trække de 5 heltoneintervaller fra 1200 cent og dele med 2. Trinstørrelserne i den skala, vi nu får, fremgår af figur 3. Jeg vil kalde den *melodisk* idet melodier profileres klart; det bliver ganske tydeligt, hvornår der er tale om heltonespring og halvtonespring; det er passende at sige, at lidt overdrivelse fremmer forståelsen. Det lille "ledetoneinterval" BH gøre melodier meget lyse. Jeg vil derfor kalde en sådan skala *melodisk*. Til gengæld er den *uharmonisk* pga. den alt for store tert på 408 cent. En sanger eller violinist, der lægger vægt på melodisk klarhed, vil ofte bruge denne lille overdrivelse.

Alle skalaer og intervalstørrelse i den pytagoræiske stemning findes i [2], appendiks, og der bliver kun 6 anvendelige tonearter.

Størrelsen af ulvekvinten for den pytagoræiske stemning beregnes således:

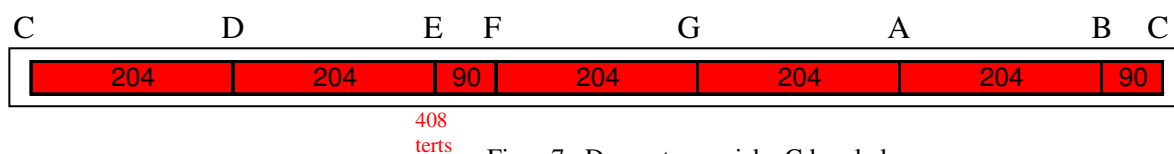
$$I(G\#, Eb) = 8400\text{cent} - 11 \cdot 1200\text{cent} \cdot \log_2(3/2) \approx 678\text{cent} \pmod{1200}$$

Halvtoneafstanden EF på 90 cent kan alternativt beregnes ved at gå 7 kvinter frem, og her kommer den lille ulvekvint med, se figur 5: $702 \cdot 6 + 678 = 4890 \equiv 90 \pmod{1200}$.

Alternativt kan man beregne afstanden fra E til F ved at gå fem kvinter baglæns:

$$I(E, F) = -5 \cdot 1200\text{cent} \cdot \log_2(3/2) \approx -3510\text{cent} \equiv 90\text{cent} \pmod{1200}$$

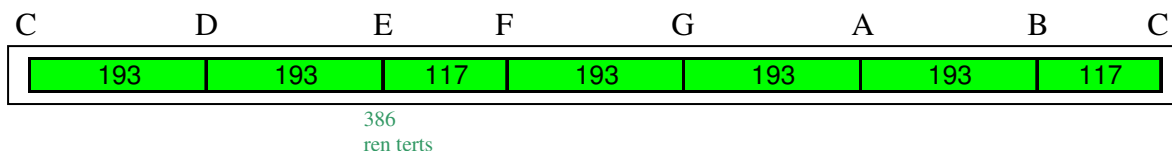
Grunden til, at der kun er seks anvendelige tonearter, fremgår af skalaoversigten appendiks B



Figur 7 . Den pytagoræiske Cdur skala.
Bemærk den lyse terts.

Middeltonestemningen

Der er elleve lave kvinter samt én ”ulvekvint” $G\#Eb$ som er uacceptabelt stor, se figur 6. Det giver den samme begrænsning, nemlig at man kun kan anvende seks tonearter. I disse tonearter vil treklange klinge særdeles smukt pga. en ren terts. Jeg vil kalde sådanne tonearter *harmoniske*. Til gengæld vil heltoneintervallerne være noget lavere end vi er vant til (193 cent), se figur 8, mens halvtoneintervallerne er voldsomt store (117 cent). Det giver melodier et slattent udtryk, som fremført af en upræcis sanger eller violinist, og tonearterne kan med rette kaldes *umelodiske*. En sanger eller violinist, som derimod skal prioritere en harmonisk renhed i en flerstemmig kontekst, må til gengæld i højere grad benytte denne stemning, især den lave terts.



Figur 8. Cdur skalaen i middeltonestemningen. Bemærk den rene terts.

Heltoneafstanden CD på 193 cent fremkommer ved at addere to små kvinter: $697 + 697 \approx 1393 \equiv 193(\text{mod } 1200)$, men halvtoneafstanden EF på 117 cent fremkommer ved at gå 7 kvinter frem. Her kommer den store ulvekvint med, se figur 5. Regnestykket bliver $697 \cdot 6 + 738 \approx 4917 \equiv 117(\text{mod } 1200)$. (Tallene passer ikke helt på grund af afrundingsfejl).

Alternativt kan man beregne afstanden fra E til F ved at gå fem kvinter baglæns:

$$I(E, F) = -5 \cdot 1200\text{cent} \cdot \log_2(5^{1/4}) \approx -3483\text{cent} \equiv 117\text{cent}(\text{mod } 1200)$$

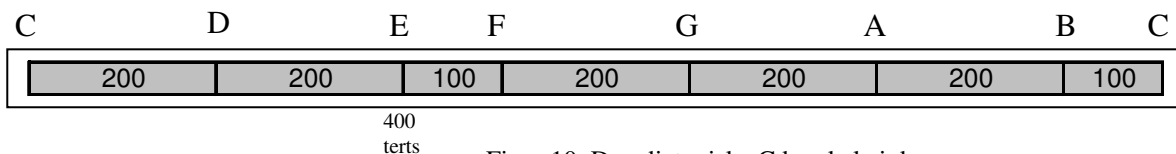
Selv ulvekvinten for middeltonestemningen er

$$I(G\#, Eb) = 8400\text{cent} - 11 \cdot 1200\text{cent} \cdot \log_2(5^{1/4}) \approx 737,6\text{cent}(\text{mod } 1200)$$

På nogle keyboard fra renæssancen er flere ”sorte tangenter” dubleret. Fx kan Eb suppleres med en ekstra tangent for $D\#$, sådan at kvinten $G\#D\#$ har samme størrelse som de øvrige kvinter.

Tilsvarende kan $G\#$ suppleret med en ekstra tangent for $A\flat$, sådan at kvinten $A\flat Eb$ får den rette størrelse. Sådan kunne man fortsætte med at dublere $C\#$ med $D\flat$ osv., se figur 9, men det er en skrue uden ende.

Figur 9. Rekonstruktion af tastatur fra et renæssance virginal. Alle ”sorte” og nogle ”hvide” tangenter er dublerede for at udvide antallet af brugbare tonearter og i højere grad at kunne undgå ulvekvinten.



Figur 10. Den diatoniske Cdur skala i den moderne stemning til sammenligning.

Rene intervaller, (3,5) diagrammet

Aritmetikkens fundamentalsætning fortæller, at ethvert positivt, rationalt tal på entydig måde kan opløses i primfaktorer

$$r = 2^v \cdot 3^x \cdot 5^y \cdot 7^z \cdot 11^a \dots$$

hvor $(v, x, y, z, a, \dots)$ er en følge af hele tal, som er nul fra et vist trin.

(Matematisk er der tale om en isomorfi af den multiplikative gruppe af positive rationale tal $\mathbf{Q}_+$ på den direkte sum af de hele tal $\bigoplus_{j \in \mathbf{N}} \mathbf{Z}$ med sædvanlig addition)

I vores system af rene toner benyttes kun tal, der indeholder primtallene 2, 3 og 5. (7 kan lejlighedsvis optræde i det interval, som kaldes naturseptimen, se side 31) Hvis vi derfor holder os til rene stamtoner kan vi se bort fra potenser af 2.

Afbildningen

$$r = 2^v \cdot 3^x \cdot 5^y \cdot 7^z \cdot \dots \rightarrow (x, y)$$

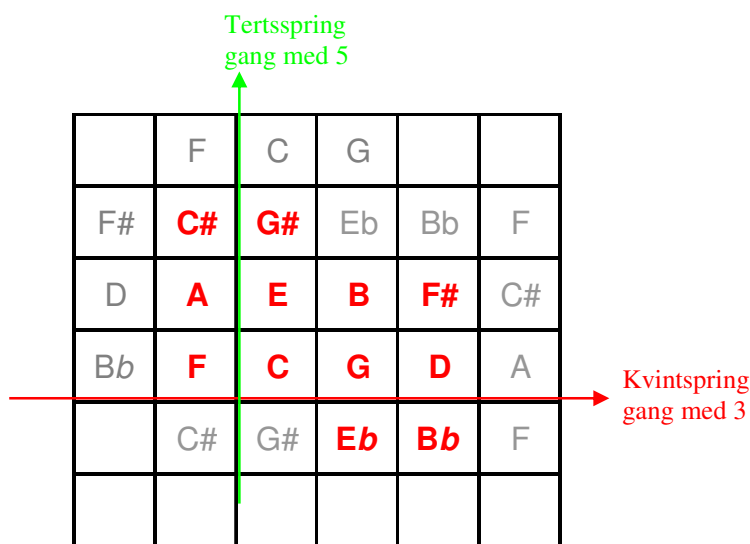
knytter derfor til enhver stamtone et par af hele tal, dvs. et punkt i heltalsgitteret $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$

Fx er det syntoniske komma repræsenteret af vektoren $(4, -1)$ idet $81/80 = 2^{-4} \cdot 3^4 \cdot 5^{-1} \rightarrow (4, -1)$.

Bemærk, at der for denne logaritmiske projektion gælder, at multiplikation af rationale tal svarer til addition af talpar.

Bemærk at multiplikation af et rationalt tal med 3 svarer til at parallelforskyde 1 i førsteaksens retning, dvs. gå en kvint op, mens multiplikation af et rationalt tal 5 svarer til at parallelforskyde 1 i andenaksens retning, dvs. gå en terts op

De valg, man har foretaget i den rene stemning, får følgende placering i heltalsgitteret $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ skrevet med rødt. Her er udgangstonen C placeret i $(0,0)$

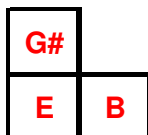


Figur 11. (3,5) diagrammet for den rene stemning.
Tonen C er i $(0,0)$, tone G i $(1,0)$ etc.

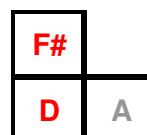
Vi kan fx aflæse koordinaterne $(-1,2)$ for tonen C#, dvs. frekvensfaktoren for C# er $3^{-1} \cdot 5^2 = 25/3$, men kan vælge $25/24$ som en anden stamtonerepræsentant for C# ved at gå tre oktaver ned.

Der er også forskellige størrelser på heltoneintervaller: Et *stort* heltoneinterval, fx CD, har frekvensforholdet $9/8$ svarende til vektoren $(2,0)$, mens *lille* heltoneinterval, fx DE, har frekvensforholdet $10/9$ svarende til vektoren $(-2,1)$.

Dette system fortsætter uendeligt i alle retninger. Fx ligger der et A til højre for D, men det er et syntonisk komma højere end det med rødt skrift, idet vi jo får det ved at parallelforskyde det røde A efter vektoren $(4,-1)$. Når man nu har udvalgt de med rødt markerede toner til en renstemning, kan man derfor ikke spille en D-dur treklang rent (DF#A). Inden for de røde felter kan man opnå 6 durtreklange med både ren tert og ren kvint, nemlig F, C, G, Eb, A og E. Man skal bare kunne placere denne figur (XX)



Figur 12. Udsnit viser en ren E-durtreklange



Figur 13. Udsnit viser en falsk D-durtreklange

så der kun optræder røde bogstaver i alle tre felter. Grundtonen vil da være nede i venstre hjørne, kvinten ligger til højre og tertsen ovenover.

Pytagoræisk stemning og middeltonestemning i (3,5) diagrammet

Den pytagoræiske stemnings stamtoner kan også placeres i heltalsgitteret $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ på den vandrette akse startende med Eb i punktet $(-3,0)$ og sluttende med G# i punktet $(8,0)$. Vektoren $(-11,0)$ er "ulvekvinten" (fra G# til Eb). Vektoren $(12,0)$ er det pytagoræiske komma (fra Eb i $(-3,0)$ til D# (=Eb) i $(9,0)$).

Middeltonestemningens stamtoner kan placeres på den lodrette akse startende med Eb i punktet $(0, -\frac{3}{4})$, Bb i punktet $(0, -\frac{2}{4})$, F i punktet $(0, -\frac{1}{4})$, C i $(0,0)$, G i $(0, \frac{1}{4})$, osv. sluttende med G# i punktet $(0, \frac{8}{4})$, idet vi hele tiden forskyder efter vektoren $(0, \frac{1}{4})$, der svarer til en middeltonekvint $3^0 \cdot 5^{1/4}$.

Rent matematisk er det interessant at bemærke, at $(x, y) \rightarrow 3^x \cdot 5^y$ er en kontinuert, injektiv afbildning af mængden af rationale talpar ind i de reelle tal, men dens inverse afbildning er diskontinuert i overalt. Jo tættere to toners frekvensfaktorer er, jo længere væk ligger talparrene fra hinanden i det rationale talgitter $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$.

Klassisk temperering. Da det er principielt umuligt at få alle toneintervaller helt rene, ender vi med spørgsmålet om at fordele urenhed på én eller anden måde. I den moderne, ligesvævende stemning fordeles snavset jævnt ud over det hele i et tyndt lag. Der er absolut ingen forskel på tonearterne; de lyder fuldstændig ens på nær selve tonelejet, ingen er specielt rene eller urene.

Det svarer lidt til at have et hus, som ikke kan rengøres, men hvor snavset kan flyttes rundt. Man kan sige, at den såkaldt rene stemning, den pytagoræiske stemning og middeltonestemning er tre forskellige måder at flytte snavset, så der er rent nogle steder og uudholdeligt andre steder. I de *klassiske tempereringer* går man en tredje vej, idet "man gør en dyd ud af snavset":

Det er jo en oplagt idé at kombinere de rene kvinter, som er for store, med middeltonekvinter, som er for små. En stemning er tempereret, når alle tonearter kan anvendes. På Bachs tid forsøgte man sig med at temperere på denne måde. Lad os prøve at se på tre regnestykker for 12 kvintskridt:

$$12 \text{ moderne kvinter } \left(2^{7/12}\right)^{12} = 128 \text{ cent, hvilket er præcis 7 rene oktaver.}$$

12 rene kvinter $(3/2)^{12} = 129,7$ cent, hvilket *overskrider* 7 oktaver.

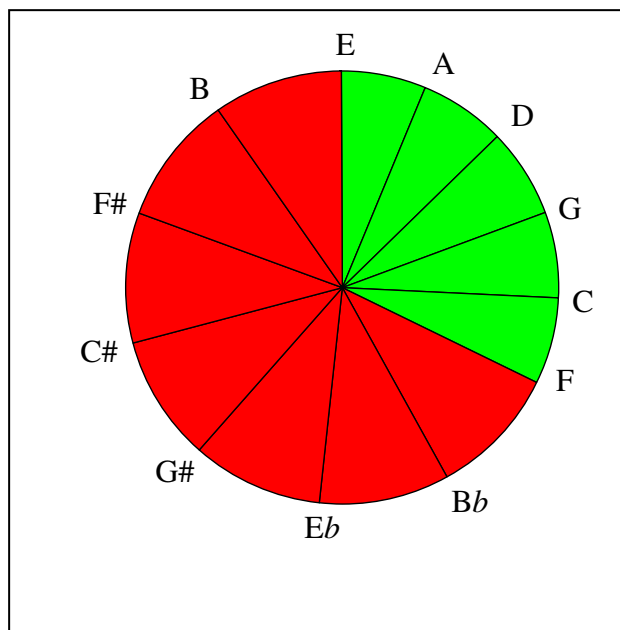
12 middeltonekvinter $(5^{1/4})^{12} = 125$ cent, hvilket er *utilstrækkeligt* til 7 oktaver.

Lad os i stedet prøve at kombinere 4 middeltonekvinter med 1 moderne kvint og derpå 7 rene kvinter: Det giver overraskende nok

$$(5^{1/4})^4 \cdot (3/2)^7 \cdot 2^{7/12} \approx 127,99991 \approx 128,000$$

hvilket inden for al ønskelig nøjagtighed netop er 7 rene oktaver!

Den stemning, som benytter sig af disse kvintskridt, kaldes Kirnberger III tempereringen efter Johann Kirnberger (elev af J. S. Bach), se figur 10. Dette er blot én af en lang række meget nært beslægtede forslag til at opnå en temperering ved kombinere store og små kvinter. Beslægtede tempereringer bærer navne som Andreas Werckmeister, Thomas Young, Francesco Vallotti, Niedhardt m. fl. Princippet med at kombinere rene kvinter med lave kvinter har holdt ved helt frem til perioden 1895-1905, hvor den moderne, ligesvævende temperering slår igennem og blev standard. ([7], Introduction) Dette går hånd i hånd med musikkens udvikling væk fra at være toneartsfikseret. I senromantikken bliver musikken mere og mere modulerende grænsende til det nærmest feberagtigt fabulerende. I modsætning til de klassiske tempereringer kan den moderne stemning byde på ensartede heltoneskalaer, som egner sig til impressionistisk musik, ligesom tolvtonemusikken fremstår bedst med tolv fuldstændig ligeberettigede toner.



Figur 10. En klassisk temperering er sammensat af en nogle rene kvinter og nogle lave kvinter, som tilsammen udfylder kvintcirklen og gør alle tonearter brugbare.

Konflikten mellem harmoni og melodi

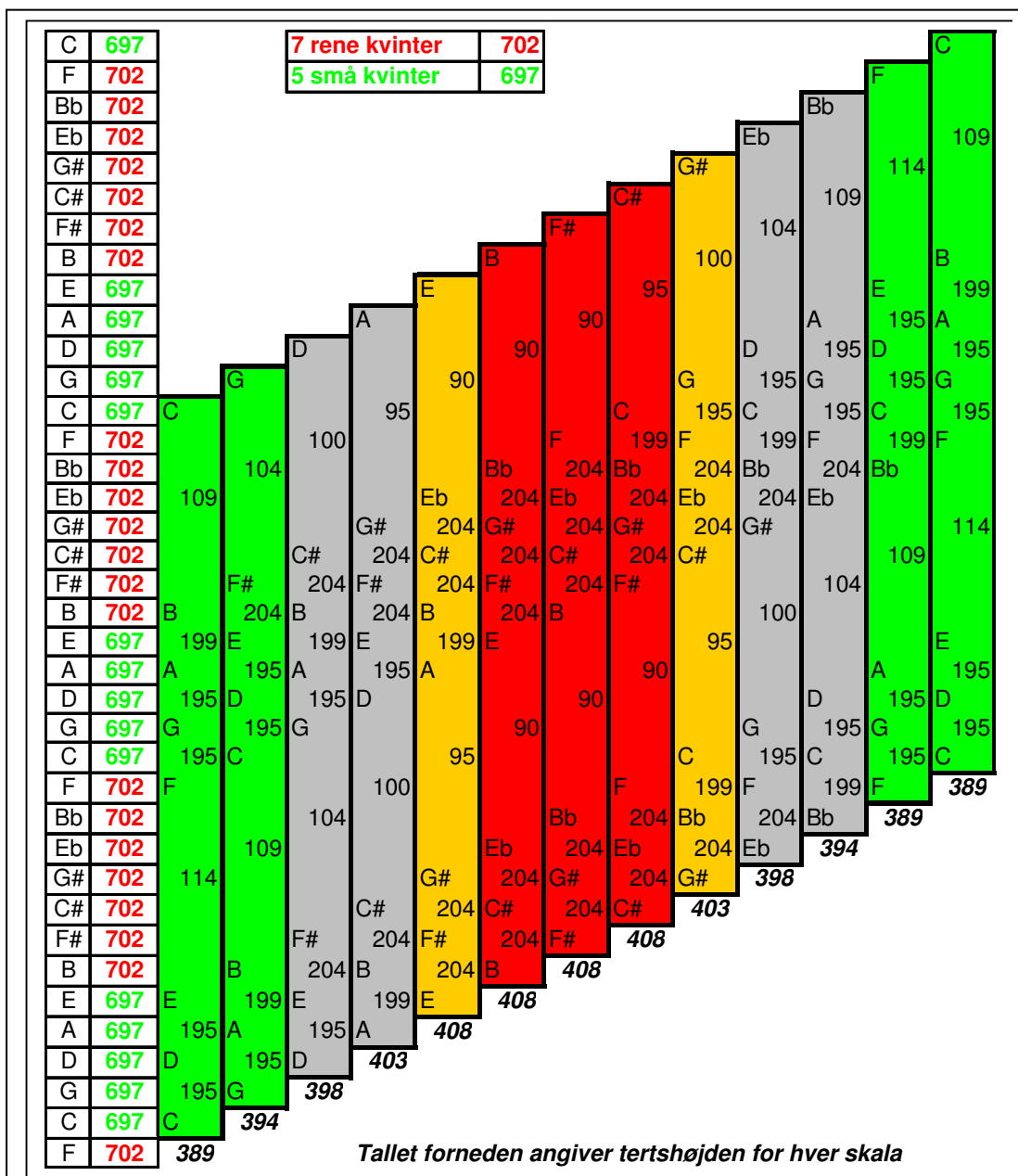
Det er væsentligt at hæfte sig ved denne fundamentale konflikt mellem *harmoni* og *melodi*, en konflikt hvor man altid må vælge side. Antag man fx i C-dur skal synge B (læs H!) efterfulgt af C og B optræder som terts i dominantakkorden, hvor G er grundtone. Hvis H skal *harmonere* med G, skal det synges mørkt for at få en ren terts GB. Hvis B derimod skal fungere *melodisk* som ledetone til grundtonen C, så skal B synges lyst. Her må man vælge i konflikten mellem at tænke vandret og lodret. Lad os nu se, hvad det gør for musikkens tonemateriale at anvende en klassisk temperering

som fx. Kirnberger III (se figur 11). Vi får nogle tonearter, som er udpræget *harmoniske* C-dur, G-dur og F-dur, altså dem med højst ét fortegn.

Vi får andre tonearter, som er udpræget *melodiske* E-dur, B-dur, F#-dur og C#-dur, altså dem med mere end fire fortegn.

Vi får nogle *mellemtonearter* som D-dur, Bb-dur, A-dur og Eb-dur, altså dem med 2-3 fortegn.

Eksempelvis er D-dur karakteriseret ved at 1. trin i skalaen er meget lille, mens 2.trin er meget stort, hvilket tydeligt udstilles i Bachs præludium i D-dur fra WTK1.



Figur 11. Excel regneark med alle 12 durskalaer i en klassisk stemning med 7 rene kvinter og 5 mindre kvinter (fx Kirnberger III). En søjle viser den diatoniske durskala startende nedefra med grundtonen. Tallene viser springene i heltone- og halvtoneintervaller. De grønne er de udpræget *harmoniske*, de røde er de udpræget *melodiske*. Tallet under hver søjle viser tertsens størrelse. Husk, at der går 7 kvinter til et halvtonetriton

Beregning af klassisk temperering og musikeksempler

Beregninger af toneafstand i en klassisk temperering foregår i et regneark, hvor der er valgt størrelser af de 12 kvinter, som til sammen skal give 8400 cent. De diatoniske durskalaer beregnes ved at lægge to kvinter sammen for heltonespring og syv kvinter for halvtonespring. I Excel kan man med fordel benytte funktionen "=REST(tal;divisor)" til at beregne disse summer modulo 1200. Det giver en oversigt som vist i figur 11

Bemærk at mellemtonearterne D, A, Eb og Bb minder meget om de moderne. Men fx har Eb og Bb meget store afstande mellem de to øverste toner (ledetoneintervallet). For D-dur er afstanden fra første til anden tone større end fra anden til tredje tone - modsat den rene stemning, hvor det er lige omvendt. I Bachs D-dur præludium WTK1 bliver lytteren hele tiden konfronteret med denne forskel; DEF# kommer igen og igen.

Den klassiske musik får de oprindelige farver tilbage, hvis den fremføres med klassisk temperering frem for den moderne. En lang række eksempler på EMU [8] viser, at valget af toneart ikke er tilfældigt, men en del af det materiale, hvori musikken udformes. Eksemplerne viser hvordan komponister behændigt udnytter tonearternes stærke sider og tager hensyn til deres svage sider.

Forklaring til regnearket

Til venstre er tonerne i kvintrækkefølge opad, næste søjle viser hvor højt en tone ligger over tonen nedenunder, dvs. alle kvintstørrelserne. Så kommer Cdur: Vi starter på C springet til D ved at addere de to kvinter i 2. søjle. Tilsvarende fra D til E. Halvtonespringet fra E til F fås ved at addere de 7 kvinter i 2. søjle mellem E og F. Ved at klikke på figur 7 i wordudgaven forvandles det til et Excel-regneark. Her vil man kunne se hvilke celler der adderes. Alle additioner er foretaget modulo 1200 ved hjælp af funktionen "=REST(tal;divisor)".

Alternative tempereringer Den ovenfor anvendte model temperering kan beskrives som en 1/5-kommas temperering, idet der er 7 rene kvinter og fem kvinter, som hver er sænket 1/5 pythagoræisk komma. En variant, som er meget brugt i dag, er 1/6-kommas temperering, hvor man har 6 rene kvinter og 6 kvinter, som er sænket 1/6 pythagoræisk komma. Den giver lidt flere, men knap så rene tertser. Se og lyt [15]. Den moderne, ligesvævende temperering kan også kaldes en 1/12-kommas temperering, idet alle kvinter er sænket 1/12 pythagoræisk komma, så kvintcirklen sluttet perfekt.

Lyt til en klassisk temperering. Meget instruktive Youtube film. Se og lyt[15]

Falskhed og renhed, Heisenbergs usikkerhedsrelation

En præcis sansning af tonehøjde kræver tid. Hvis man spiller to toner på 440,0 Hz og 440,2 Hz vil man først efter $\Delta T = 5,0$ s have hørt en svævning. Hvis man spiller en tone med frekvensen f i et kort tidsrum ΔT , kan man beregne lydsignalets Fouriertransformerede, som viser, at signalet ikke kun indeholder én frekvens men et interval af frekvenser omkring f med bredden $1/\Delta T$. Når vi hører et lydsignal foretages der en frekvensanalyse med en ubestemthed Δf , som må være større end denne laveste værdi. Det betyder, at

$$\Delta f \cdot \Delta T \geq 1$$

Vi kalder denne ulighed for Heisenbergs usikkerhedsrelation på grund af dens slægtskab med kvantemekanikken. Hvis man ganger igennem med Planck konstanten h , får man den fra kvantemekanikken velkendte tids-energi-usikkerhedsrelation

$$\Delta E \cdot \Delta T \geq h.$$

Fra Heisenbergs usikkerhedsrelation kan man forstå, at hvis man skal spille en falsk tone, slipper man bedst fra det ved at vælge en dyb tone med lav frekvens f og kun spille den i et kort tidsrum ΔT : For den relative ubestemthed på frekvensen gælder da

$$\frac{\Delta f}{f} \geq \frac{1}{f \cdot \Delta T}.$$

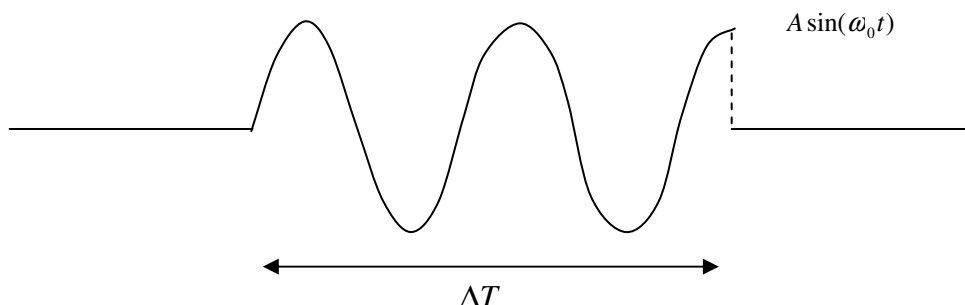
Hvis vi fx tager et dybt A med $f = 220$ Hz og lader det klinge i tidsrummet $\Delta T = 0,2$ s, vil den relative usikkerhed $\Delta f / f$ være mindst 2 %. Til sammenligning er afvigelsen mellem den rene terts og den pythagoræiske terts kun $(81-80)/80 = 1,25$ %.

Bachs præludium fra WTK1 i C#-dur benytter netop disse tricks: Der spilles hurtigt og staccato. Desuden ligger den falske terts i slutakkorden netop meget dybt, se side 18.

Udledning af Heisenbergs usikkerhedsrelation.

En sinustone spillet i et langt tidsrum indeholder kun én bestemt frekvens f_0 . Men hvis den kun spilles i et kort tidsrum, vil signalet den indeholde mange frekvenser omkring f_0 . Lad os analysere det signal, som fremkommer ved at lade en ren sinustone med frekvens f_0 klinge i et tidsrum af varigheden ΔT .

$$x(t) = \begin{cases} A \sin(\omega_0 t) & \text{for } t \in [0; \Delta T] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$



Figur 12. En kort tone af varighed ΔT

Af bekvemmelighedsgrunde har vi sat amplituden til 1 og benyttet den cykliske frekvens $\omega_0 = 2\pi f_0$. Endnu større bekvemmelighed opnås ved at skrive signalet på den komplekse form

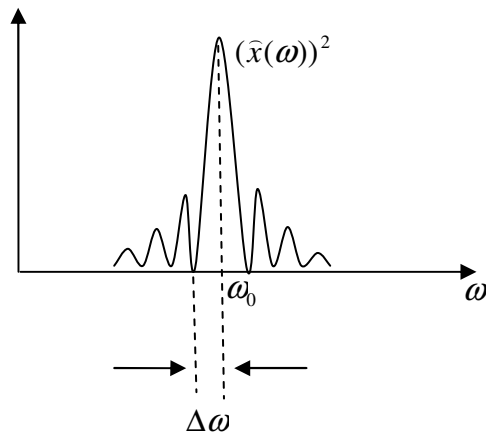
$$x(t) = \begin{cases} e^{i\omega_0 t} & \text{for } -\Delta T/2 \leq t \leq \Delta T/2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Den fouriertransformerede beregnes til

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{2}{\omega_0 - \omega} \sin((\omega_0 - \omega)\Delta T/2)$$

Singulariteten i $\omega = \omega_0$ kan hæves, idet vi finder $\hat{x}(\omega_0) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{2}{\omega_0 - \omega} \sin((\omega_0 - \omega)\Delta T/2) = \Delta T$ som

maksimumsværdi. Grafen for $(\hat{x}(\omega))^2$ viser, hvordan energien fordeles sig på forskellige frekvenser, se figur 13.



Figur 13. En kortvarig tones energifordeling på forskellige frekvenser

Som mål for frekvensusikkerheden finder vi afstanden fra ω_0 til den værdi ω , hvor den fouriertransformerede $\hat{x}(\omega)$ første gang bliver nul. Det sker, når $(\omega_0 - \omega)\Delta T / 2 = \pi$, hvilket giver $\Delta\omega = \omega_0 - \omega = 2\pi / \Delta T$, eller $f_0 - f = \frac{1}{\Delta T}$. Idet vi nu tager denne størrelse som mindste værdi for usikkerheden Δf , har Heisenbergs usikkerhedsrelation $\Delta f \cdot \Delta T \geq 1$.

Musikseksempler med klassisk temperering

J. S. Bach, Præludium i C-dur, Das Wohltemperierte Klavier I, 1722, BWV 846.

I Bachs C-dur præludium WTK1 opleves en nærmest guddommelig renhed, når akkorderne flyder sammen. Det spilles gerne legato med pedal, så tonerne i hver figur overbindes. Det opleves meget harmonisk, og der er ingen melodi, og det er jo noget C-dur kan. Gennem hele præludiet klinger alle akkorderne udsøgt rent. Man skal være en højt betalt klaverpædagog for siden at gide høre det fremført med den moderne stemning.



J. S. Bach, Præludium i C-dur
Das Wohltemperierte Klavier I, 1722, BWV 846

J. S. Bach, Fuga i C-dur, Das Wohltemperierte Klavier I, 1722, BWV 846.

I C-dur fugaen kan man fx bemærke at tertsen i slutakkorden ligger højt oppe. Det lyder smukt i C-dur med den rene terts, men hvis man transponerer til C#-dur, lyder det falsk



Slutningen af J. S. Bach, Fuga i C-dur
Das Wohltemperierte Klavier I, 1722, BWV 846
Bemærk tertsen i slutakkorden, grøn pil

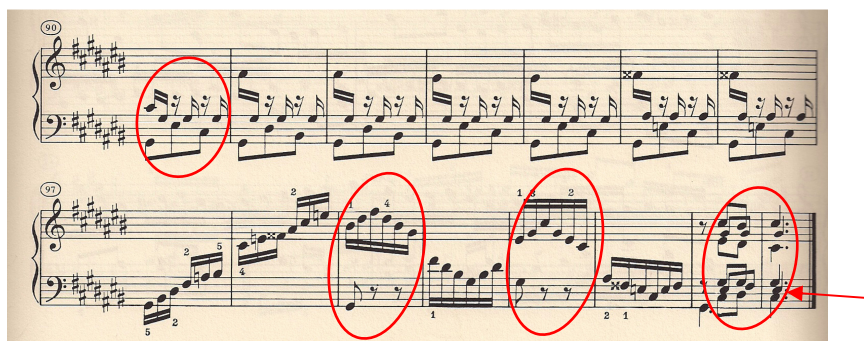
J. S. Bach, Præludium i C#-dur, Das Wohltemperierte Klavier I, 1722, BWV 848.

Bemærk de brudte akkorder her i modsætning til C-dur præludiet. Der er tradition for at spille staccato og hurtigt, så tonerne kun klinger samtidigt ganske kortvarigt. I overensstemmelse med Heisenbergs usikkerhedsrelation kan man på denne måde affinde sig med C#-durs falske terts. Zuzana Ruzickovas indspilning [12] benytter en dæmper som fjerner overtonerne i en sådan grad, at man næppe hører hvor uharmonisk C#-dur er.



J. S. Bach, Præludium i C#-dur
Das Wohltemperierte Klavier I, 1722, BWV 848

En række arpeggio-figurer leder frem til slutakkorden: Den næstnederste tone, som er tertsen, er markeret med rød pil. Hvis man fjerner den, får vi en tom C#-akkord med rene kvinter og kvarter. Når den falske terts lægges ind dybt i akkorden for at give akkorden lidt durkøn, tolereres den bedre i overensstemmelse med Heisenbergs usikkerhedsrelation, end hvis den havde ligget højt oppe i akkorden (som i C-dur fugaen)



Afslutning af J. S. Bach, Præludium i C#-dur
Das Wohltemperierte Klavier I, 1722, BWV 848
Bemærk den lave terts i slutakkorden, rød pil

J. S. Bach, Præludium i D-dur, Das Wohltemperierte Klavier I, 1722, BWV 850.

Bemærk, at de tre første toner DEF# kommer igen og igen. Det er et særligt træk ved D-dur, at afstanden mellem første og anden tone er meget lille (195 cent) mens afstanden mellem anden og tredje tone er stor (204cent). I en renstemt diatonisk skala³ er det lige omvendt. D-dur er altså karakteriseret ved at 2. trin er lavt, og det får vi at høre mange gange:



J. S. Bach, Præludium i D-dur
Das Wohltemperierte Klavier I, 1722, BW V 850

J. S. Bach, Toccata og fuga i d-mol, 1708, BMW 565

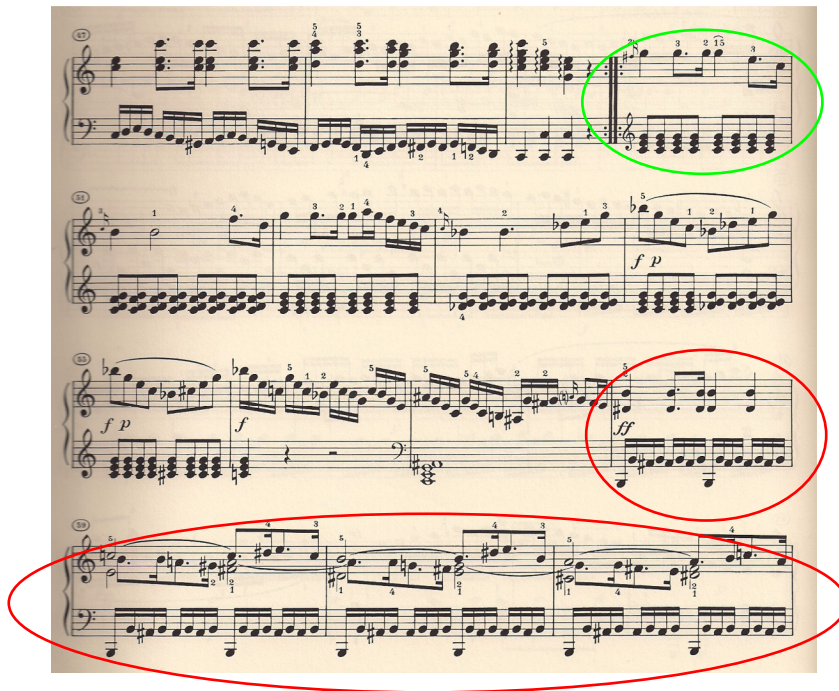
Bemærk ledetoneintervallet C#D (100 cent som vi kender fra i dag, rødt på figuren) er den fremtrædende afslutning på hver af figurerne. D-durakkorden i takt 3 klinger med en næsten ren tert. Havde vi valgt at transponere til c-mol eller f-mol, ville takt 3 klinge en renere, men ledetoneintervallet (BC 114 cent/ EF 109 cent) ville lyde alt for klodset og tungt.

J. S. Bach, Toccata og fuga i d-mol
1708, BMW 565

³ I en ren skala er frekvensfaktoren for første til andet trin 9/8, men frekvensfaktoren fra andet til tredje trin kun er 10/9.

W. A. Mozart, Klaversonate i a-mol, 1778, KV 310

Vi går direkte til gennemførlingsdelen. Her bliver sonatens knugende a-moltema først præsenteret i C-dur, denne gang tillidsvækkende og med stor ynde. Men så trækkes tæppet væk under lytteren og man dratter ned til en turbulent rystetur i B-dur (læs H-dur!), der med sin karske terts (BD#) indleder en farverig rejse i kvintskridt gennem E-dur, A-dur og D-dur tilbage til reprisen i a-mol. En klassisk temperering fremhæver musikkens virkemidler på overbevisende måde.



W. A. Mozart, Klaversonate i a-mol
Starten af gennemførlingsdelen. 1778, KV 310

Beethoven, Bagatelle i a-mol "Für Elise", ca. 1810, WoO 59

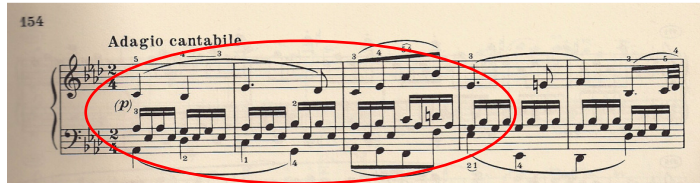
Den melodiske skønhed hviler på det lyse D#. Afstanden D#E er kun 90 cent, (D# er det samme som Eb i tabellen). Dette efterfølges af en harmonisk ren a-mol med den rene terts CE. Hvis man transponerer en halv tone op til Bb-mol, lyder temaet umelodisk pga. den store afstand mellem de to første toner FE på 114 cent.



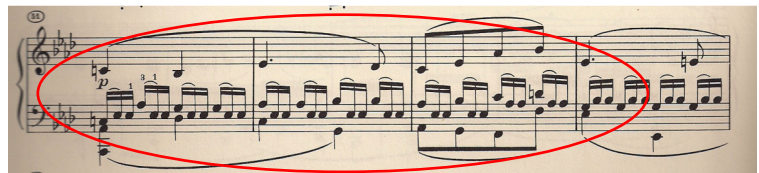
Beethoven, Bagatelle i a-mol "Für Elise"
ca. 1810, WoO 59

Beethoven, Klaversonate i c-mol "Pathétique", 2. sats, 1798/99, Opus 13

Cembaloet afløses af hammerklaveret, der med sin blødere klang og færre overtoner afrunder de melodiske tonearters lyse og karske tertser. De melodiske tonearter nyder stigende popularitet og anvendes gradvis hyppigere op gennem det 19. århundrede. Beethoven var forud med alt. En klassisk temperering fremhæver den melodiske side af Adagio cantabile i Ab-dur (= G# i tabellen) fra Pathétique-sonaten, mens akkompagnementet bliver mere uroligt og næsten ikke kan finde hvile på grund af den lyse terts AbC (G#C). Det passer fint med, at temaet i reprisen iklædes animerende, trioliserede 16.-dele. Hvis man herefter spiller satsen i en moderne stemning, kan det føles som at blive pakket ind i vat; det bliver i hvert fald et andet stykke musik.



Beethoven, Klaversonate i c-mol "Pathétique", 2. sats
1798/99, Opus 13



Beethoven, reprisen fra "Pathétique", 2. sats
1798/99, Opus 13

Beethoven, Klaversonate i C#-mol "Måneskin", 1. sats, 1801, Opus 27, nr. 2

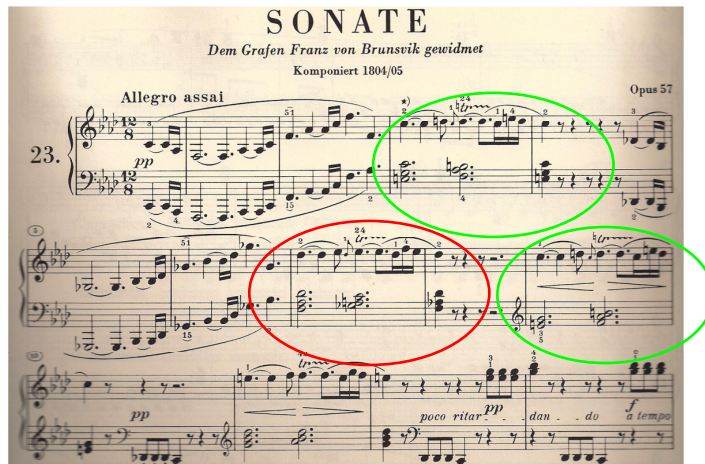
Måneskinssonatens førstesats byder på mange virkningsfulde farveskift. I takt 9 søger musikken at finde hvile på en urolig E-dur, som derefter erstattes af den rene e-mol og G7 med meget afspændende virkning. I takt 15 går det den anden vej: Fra en meget harmonisk B-mol løftes moltertsten til D#, som danner en meget pythagoræisk durterts i B-dur (altså H-dur).



Beethoven, Klaversonate i C#-mol "Måneskinssonaten" 1. sats,
1801, Opus 27, nr. 2

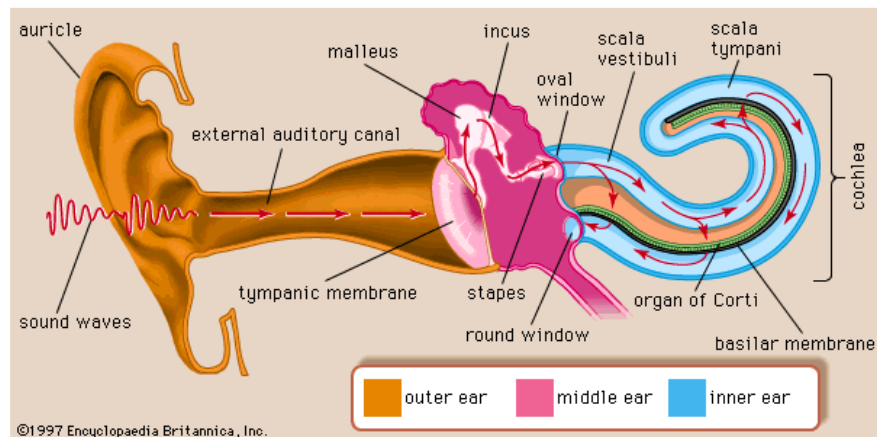
Beethoven, Klaversonate i f-mol "Appassionata", 1. sats, 1804/5, Opus 57

Der åbnes med en f-mol-figur, som besvares i C-dur takt 3. Derpå kommer åbningsfiguren en halv tone højere i Gb-dur (F#-dur), som nu besvares i Db-dur (C#-dur) i takt 7. Umiddelbart efter gentages svaret i C-dur, men nu med en tert, der ligger højt oppe i akkorden. Dette sidste skift giver en stor kontrast i en klassisk temperering. Det virker meget afspændende, men efterfølges snart af "skæbnemaet" Db Db Db C, som resten af satsen er præget af.



Beethoven, Klaversonate i f-mol "Appassionata", 1. sats
1804/5, Opus 57

Høresansens fysik



Figur 14. Øret

For at forstå grundlaget for oplevelsen af konsonans, må man kende lidt til ørets fysiologi. Ved trommehinden omdannes lydets trykssvingninger i luften til mekaniske svingninger, der via kroppens tre mindste knogler i det luftfyldte mellemøre formidles videre til sneglen, cochlea, via det ovale vindue (på figur 14 er cochlea delvis foldet ud). Her fortsætter signalet inde i cochlea som en vækssvingning, idet et tryk indad på det ovale vindue resulterer i en udbuling ved det runde vindue. Frekvensen vil bestemme længden af den svingende væskestræng i cochlea. Jo højere frekvens, jo mindre svingende væske, jo kortere svingende væskestræng. Den elastiske

basilarmembran adskiller de to dele af den væskefyldte cochlea. En given frekvens giver resonans med en bestemt længde af væskestrengen, som så passer med et bestemt sted, hvor basilarmembranen selv tager del i væskesvingningen. Basilarmembranen er belagt med et tæppe af hårceller, som via individuel nerveforbindelse til hjernen kan fortælle, hvor på basilarmembranen, der er forstyrrelse. Cochlea bliver på denne måde en fysisk frekvensanalysator, om danner en klangfigur på basilarmembranen, der kan betragtes som det indkommende lydsignals fouriertransformerede.

Se animationerne her

<http://www.blackwellpublishing.com/matthews/ear.html>

<http://www.youtube.com/watch?v=dyenMluFaUw>

[http://highered.mcgraw-](http://highered.mcgraw-hill.com/sites/0072495855/student_view0/chapter19/animation_effect_of_sound_waves_on_cochlear_structures_quiz_2.html)

[hill.com/sites/0072495855/student_view0/chapter19/animation_effect_of_sound_waves_on_cochl
ear_structures_quiz_2.html](http://highered.mcgraw-hill.com/sites/0072495855/student_view0/chapter19/animation_effect_of_sound_waves_on_cochlear_structures_quiz_2.html)

Forsøg med væskesvingninger

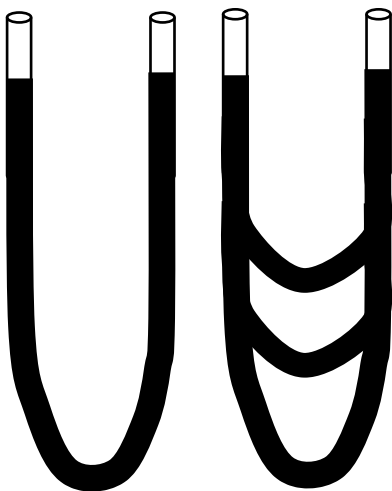
Man kan udføre forsøg med væskesvingninger i et U-rør, som giver en forståelse af væskesvingninger i cochlea.:

Et U-rør fyldes med væske med densitet ρ . Væskestrengens længde er L . U-rørets to ender skal være lodrette, se figur 15 tv. (resten af røret kan gerne være en slange, som bugter sig vilkårligt). Når væsken i højre rør hæves x i forhold til ligevægtsniveauet, vil systemet have en potentiel energi af størrelsen $E_{\text{pot}} = \rho Agx^2$, hvor A er tværsnitsarealet af røret. Dette udtryk viser, at væskestrengen svinger som en harmonisk oscillator med fjederkonstant $k = 2\rho Ag$. Massen af den svingende væskestreng er $m = \rho AgL$. Hvis vi antager, at alle dele af væsken hele tiden bevæger sig med samme fart, kan vi beregne svingningsfrekvensen til

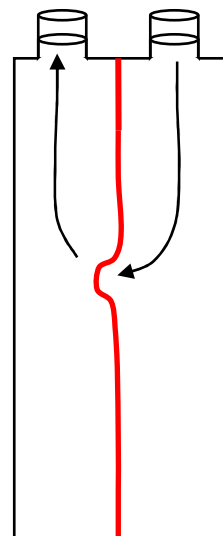
$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2g}{L}}.$$

Altså jo længere væskestreng L , jo lavere frekvens.

Lad os nu forestille os et mere kompliceret rørsystem med flere forbindelser, så vi kan få forskellige længder af væskestrengene $L_1, L_2, L_3, \dots$ svarende til frekvenserne $f_1, f_2, f_3, \dots$, se figur 15 th. Hvis man med et stempel, der svinger op og ned med én af disse frekvenser, trykker på væsken øverst til venstre, vil den del af væsken, som har en længde svarende til denne frekvens, blive sat i resonanssvingninger.



Figur 15. Til venstre et simpelt rør. Til højre en resonator med tre frihedsgrader.



Figur 16. Resonator med uendelig mange frihedsgrader

Endelig kan vi udbygge systemet til et væskefyldt kar med to åbninger foroven, se figur 16. Væsken adskilles med en gummimembran i to dele. Ved påvirkning med en bestemt frekvens gennem den ene åbning vil der opstå en resonanssvingning svarende til de sorte pile, sådan at den svingende væskestreng får den rigtige længde svarende til denne frekvens. Membranen vil nu vibrere ét bestemt sted, og det sted vil flytte sig, hvis vi ændre frekvensen. På den måde koder en bestemt frekvens til en forstyrrelse et bestemt sted på membranen. Apparatet er nu en model for cochlea. Væsken i cochlea sættes i svingninger af stigningsbølgen gennem det ovale vindue. Den anden åbning er det runde vindue. Placeringen af en forstyrrelse ved en bestemt frekvens er nu ikke længere bestemt af tyngdekraften, men derimod af stivheden af basilmembranen samt de membraner, der dækker de to vinduer, samt hele cochleas geometri i øvrigt.

Der tales tit om bølger, som bevæger sig gennem cochlea fra det ovale til det åbne vindue. Men væskestrengens længde er langt mindre end bølgelængden i lymfевæsken, hvilket gør bølgebegrebet irrelevant; man kan slet og ret betragte bevægelsen som en væskesvingning i en usammentrykkelig væske.

Placeteorien og dens problemer

Et tæppe af hårceller på basilmembranen meddeler hjernen via et nervebunt *hvor*, forstyrrelserne finder sted. Denne forståelse af sansning af tonehøjde går under navnet *placeteorien*. Selve kodningen, der til ethvert sted på basilmembranen tilordner sansning af en bestemt tone, kan ikke være fast. Dels vokser organismen, geometri og stivhed ændres med alder og sygdom og dermed også de fysiske parametre, der bestemmer resonansstedets placering. Dels skal de to ører være "enige", hvilket vi kommer tilbage til.

Når vi hører en tone fra et musikinstrument, vil den være ledsaget af overtoner, der som regel er multipla af grundfrekvensen. En tone med overtoner danner derfor normalt en klangfigur på basilmembranen svarende til alle multipla af grundfrekvensen. To toner med grundfrekvenserne f_1 og f_2 vil have et uendelig mange fælles partialtoner, når frekvensforholdet er et rationalt tal $f_2 / f_1 = p / q$. Ligningen

$$npf_1 = nqf_2$$

viser jo, at partialtonerne for den første tone med numrene $p, 2p, 3p$ osv. er identiske med partialtonerne for den anden tone med numrene $q, 2q, 3q$ osv. . Fællesskabet mellem klangfigurerne er det fysiske grundlag for oplevelsen af slægtskabet mellem tonerne, som vi kalder *konsonans*. Jo mindre tallet $p + q$ er, jo mere fysisk fællesskab mellem de to klangfigurer, jo mere konsonans.

Forsøg viser imidlertid, at vi også oplever dette konsonansslægtskab mellem *rene* sinustoner, altså toner, der ikke er ledsaget af overtoner. Det kan placeteorien *ikke* gøre rede for. Stimuleringsstedet på basilmembranen for en tone og stimuleringsstedet for oktaven over er jo bare to steder, der ikke umiddelbart er fysisk beslægtede.

Harmonisk forvrængning

Når et signal $x(t)$ skal gennem fx mikrofon, forstærker og højttaler, er det ønskeligt at udgangssignalet $y(t)$, der kommer ud af højttaleren, er en forstærket og uforvrænget kopi af indgangssignalet. Normalt vil udgangssignalet være en funktion af indgangssignalet

$$y(t) = F(x(t))$$

I "bedste" fald kan man opnå et uforvrænget signal, når F er lineær, sådan at $y(t) = A \cdot x(t)$, hvor A er en konstant.

Hvis F ikke er lineær, opstår der *harmonisk forvrængning*.

Hvis $x(t)$ er et periodisk signal, så vil $y(t)$ også være periodisk. Hvis $x(t)$ er en ren sinustone med frekvens f , så vil udgangssignalet være et sammensat signal med samme periode, som derfor kan Fourieropløses i partialtoner med frekvenserne $f, 2f, 3f, \dots$ osv. Hvis $x(t)$ er et signal sammensat af to toner med frekvenserne f_1 og f_2 , vil udgangssignalet indeholde frekvenserne

$$f = n_1 f_1 \pm n_2 f_2$$

hvor n_1 og n_2 er hele tal. Den andel, de forskellige kombinationsfrekvenser indgår med, afhænger stærkt af, hvordan transmissionsoperatoren F afviger fra at være lineær.

Hvis for eksempel $F(x) = Ax + Bx^2$, så vil frekvenserne $2f_1, 2f_2, f_1 + f_2$ og $f_1 - f_2$ alle optræde i udgangssignalet ud over f_1 og f_2 . Tilføjer man et tredjeled Cx^3 til $F(x)$, vil der forekomme kombinationsfrekvenser med $|n_1| + |n_2| \leq 3$ osv.

Forvrængning i øret

Man har med interferometriske målinger påvist, at de nævnte forvrængningsprodukter forekommer på basilmembranen i cochlea hos levende marsvin. Se eventuelt artiklen [<http://jp.physoc.org/content/509/1/277.abstract>]

En række forsøg, man selv kan udføre, kan forklares ved, at lydssignaler forvrænges i mellemøret på vejen fra trommehinden via øreknoglerne til cochlea.

De følgende forsøg kræver en tonegenerator med to kanaler. Man kan downloade en prøveversion af Reatime Analyzer Light [www.ymec.com/products/rale]. Der får man adgang til en tonegenerator med to kanaler samt en FFT frekvensanalysator, som fungerer øjeblikkeligt, real time.

Differenstoner og svævninger

Send 500 Hz og 700 Hz ind i samme øre. Man hører, at der opstår en differenstone på 200 Hz

Send 1500 Hz og 1502 Hz ind i samme øre. Så oplever man en svævning på 2 Hz.

Hvis frekvensforholdet for to toner er rationalt $f_2 / f_1 = p / q$ (antag den uforkortelig), så vil de to toner begge være partialtoner for en fælles grundtone med frekvens $f_0 = \frac{1}{q} f_1 = \frac{1}{p} f_2$. Alle kombinationsfrekvenser er da multipla af denne fælles grundfrekvens

$$f = n_1 f_1 + n_2 f_2 = (n_1 q + n_2 p) f_0 = m f_0$$

idet tallet i parentes for passende valg af n_1 og n_2 kan frembringe ethvert helt tal m , når p og q er primiske.

Hvis frekvensforholdet f_2 / f_1 for to toner er irrationalt, vil mængden af kombinationsfrekvenser derimod ligge tæt, sådan at ethvert nok så lille åbent interval vil indeholde uendelig mange af disse kombinationsfrekvenser, hvis energimæssige andel dog vil være lav for store værdier af n_1 og n_2 .

Ud fra dette kan man forstå, at en kombination af toner i ren oktavafstand ($2/1$), kvintafstand ($3/2$), kvartafstand ($4/3$), tertsafstand ($5/4$) eller moltertsafstand ($6/5$) danner enkle klangfigurer med stort fællesskab af partialtoner. Med stigende tal bliver klangfiguren gradvis mere mudret idet omfanget af fælles partialtoner svinder ind. Hvis f_2 / f_1 er et irrationalt tal tæt på et rationalt tal med lav nævner, vil tonerne dog stadig opfattes som konsonante på grund af en vis frekvensbredde i basilmembranens respons.

Særligt overbevisende forsøg kan man udføre med to ultralydstransducere. Hvis den ene udsender ultralyd med frekvensen 40.000 Hz og den anden 40.500 Hz, kan man naturligvis intet høre, hvis lydene sendes ind gennem hvert sit øre; lydene ligger jo en oktav over den hørbare grænse. Der sker ingenting i cochlea. Men hvis de sendes ind gennem samme øre, hører man tydeligt en differenstone

på 500 Hz. Man kan ikke høre ultralyd, men man kan høre forskellen mellem dem! (Man kan i øvrigt tydeligt iagttage Dopplereffekt, hvis de to lydgivere bevæges lidt i forhold til hinanden). Når vi i mobiltelefonen lytter til en dyb stemme på 100 Hz, så er det kun partialtonerne 400 Hz, 500 Hz, 600 Hz, osv. som når frem til modtageren. Den harmoniske forvrængning i mellemøret kan forklare, at vi genkender stemmens grundfrekvens på 100 Hz, der genopstår som differensstone.

Forsøg, der involverer begge ører

Med fx 1205 Hz og 1200 Hz vil man tilsvarende opleve en svævning på 5 Hz, når tonerne kommer ind i samme øre. Hvis de derimod kommer ind i hvert sit øre, vil man ikke opleve nogen svævning, idet der ikke forekommer interferens af svingningerne. Interferensfænomener finder kun sted i "analogdelen", dvs. når de to lydsignaler når frem til samme basilmembran. Fra hørenerverne og videre frem til bevidstheden ("digitaldelen?") kan interferens ikke finde sted.

De fleste mennesker oplever tonehøjden for en bestemt tone som den samme, hvad enten lyden kommer ind gennem det ene øre eller det andet. Kodningen, som "oversætter" fra stimulering ét sted på basilmembranen til en oplevelse af tonehøjde, stemmer normalt overens for de to ører. Det er ikke almindeligt at folk "hører dobbelt". *Diplacusis binauralis* er en sjælden tilstand, hvor samme frekvens opleves som to forskellige toner, alt efter hvilket øre den høres gennem.

Et simpelt forsøg, man selv kan udføre, viser, at hjernens sansning af tonehøjde kan omprogrammeres på få sekunder: Hvis man sender 1200 Hz ind i det ene øre og 1250 Hz ind i det andet øre, vil man efter ganske få sekunder kun opleve én tone, selv om der er en halv tones forskel. Det er jo ganske overraskende. Man må jo forestille sig, at hjernen omprogrammerer den kodning, der oversætter en stimulering ét sted på basilmembranen til en sansning af tonehøjde sådan at "ørerne tror, de er enige". (Noget lignende sker efter et stykke tid, hvis man sætter solbrilleglas med lidt forskellige farver foran øjnene). Efter 10 - 20 sekunder vil hjernen befinde sig i en akut tilstand af *diplacusis binauralis*. Man kan så slukke for den ene kanal og derefter flytte den anden *plug* skiftevis fra det ene øre til det andet, idet man sørger for, at tonen ikke på noget tidspunkt sanses samtidigt gennem begge ører. Det er en god idé at bruge de helt små *ear plugs*. Det kan nærmest være en sårende oplevelse for musikalske mennesker, at den samme tone opleves helt forskelligt med de to ører. Jeg har lavet en stereolydfil, hvor melodien i venstre kanal klinger en halv tone lysere end i højre kanal. Høres den i mono, lyder det som forventet forfærdeligt, men i stereo med absolut kanaladskillelse lyder det overraskende nok fuldstændig rent!

Mine elever har i Naturvidenskabeligt Grundforløb udført forsøg med en tonegenerator: En forsøgsperson lytter til en tone i den ene kanal, uden at frekvensen er synlig på skærmen. Personen skal derefter indstille frekvensen i den anden kanal til samme tone. Forsøg viser, at de fleste kan gøre dette inden for 1 Hz, forudsat at der lyttes i mono, og begge toner kommer ind i samme øre. Hvis tonerne kommer ind gennem hvert sit øre, vil der derimod typisk være en afvigelse på 50 Hz (ca. ½ tone, når vi er omkring 1100-1300 Hz). Disse forsøg viser, at vores evne til at sammenligne toner hviler på ørets fysik forud for hjernens oversættelse til en bevidsthedsoplevelse.

Gehör versus absolut gehør

Gehör kan man definere som en sikker korttidshukommelse for tonehøjde. For langt de fleste mennesker med gehør, selv for meget musikalske personer, lagres sansningen af tonehøjde ikke i langtidshukommelsen. De få personer, der besidder denne evne, siges at have absolut gehør.

Jeg har haft lejlighed til at udføre forsøg med nogle få personer med absolut gehør. Det viser sig at *akut diplacusis binauralis* kan fremkaldes med samme lethed som hos alle andre. Hjernens reprogrammerbarhed er åbenbart til stede hos alle, og tilstanden er heldigvis reversibel. Det er uklart for mig, men jeg fornemmer, at der er en komplementaritet (i Bohrs forstand) mellem på den

ene side at udøve en aktivitet, der hviler på absolut gehør, og på den anden side den aktivitet beskrevet ovenfor, der fremkalder *akut diplacusis binauralis*.

Jeg mener, det er helt fejlagtigt at sammenkæde den klassiske musiks følelsesmæssige tilknytning til tonearter sammen med absolut gehør, især fordi kammertonen A har svinget fra 392 Hz til 468 Hz (fra G til Bb). Ikke begrundet følelsesmæssigt eller musikalsk, men af hensyn til for instrument- eller stemmeklang.

Flere misforståelser

Når folk kommer i kontakt med historiske stemninger, vil de ofte stifte bekendtskab med den såkaldte rene stemning. (Et ufortjent navn; man kan ikke en gang spille d-mol, idet bare kvinten DA er uacceptabelt falsk, faktisk 21 cent for lav). Den er ganske uanvendelig, og der er mig bekendt ikke skrevet musik til netop denne stemning, som derfor kun er af teoretisk interesse. Med undtagelse af 6 rene durakkorder og 6 rene molakkorder er der ikke noget at komme efter, heller ikke melodisk. Når jeg nævner den, er det fordi jeg ofte har hørt fx Bachs præludium i B-dur (Læs H) WTK1 spillet med det formål at demonstrere hvor dårligt historiske stemninger lyder, med det budskab at vi i dag er rigtig godt kørende med den moderne, ligesvævende stemning. Det lyder også ganske overbevisende dårligt, men det har altså intet at gøre med historiske keyboardstemninger og kan altså ikke bruges til at hænge de klassiske stemninger ud for at være dårlige.

Partialtoner og den rene stemning og "the missing fundamental"

For en given tone med frekvens f vil de såkaldte "rene" overtoner være partialtonerne med frekvenserne $f_n = n \cdot f_1$, hvor $n = 1, 2, 3, \dots$. Når tonen fra et instrument har rene partialtoner, vil det pga. den harmoniske forvrængning være sådan at instrumentets egne partialtoner falder sammen med de partialtoner, som frembringes af ørets egen harmoniske forvrængning. (et ufortjent negativt ladet ord).

De rene overtoner kaldes for naturtonespektret.



Figur 17. Naturtonespektrets første 10 partialtoner

Falske overtoner

Nu er $f_n = n \cdot f_1$ ikke nogen naturlov, men tværtimod et ideal, som kun opnås med tilnærmelse. Et instrument, hvis partialtoner afviger væsentligt herfra, vil klinge specielt på grund af interferensen mellem "falske" overtoner og de "rene" multipla, som produceres ved ørets harmoniske forvrængning. Det er et ofte overset faktum, at en lydkildes tonespektrum nemt kan være anderledes. Fx vil en svingende streng med inhomogen massefordeling have et afvigende partialtonespektrum. Det er meget nemt at indse for en ellers ideel, svingende streng, der som

bekendt adlyder $f_n = n \cdot f_1$. Hvis man nemlig anbringer en punktformet masse, som fæstnes præcis på midten af strengen, så vil det ikke ændre på partialtonerne med lige nummer n , idet der er knude på midten og den monterede masse ikke deltager i nogen bevægelse. Derimod bliver grundtonens frekvens lavere, da der er bug på midten og da en større masse må svinge med lavere frekvens. Tilsvarende gælder for alle andre partialtoner med ulige nummer. Kvaliteten af strenge til guitar, violin mm. hviler blandt andet på at massefordelingen er homogen. For klaverstrengene er stivheden af strengen så stor, at overtonerne faktisk bliver en anelse lysere end $f_n = n \cdot f_1$. For de dybe strenge kompenseres der ved, at kobberbeviklingen først starter et stykke inde fra begge sider på strengen. (Næste gang du passerer et klaver, så kig ind i det). For de lyse toner bliver de høje partialtoner blot en del af den klangfarve, klaverets diskanttoner nu har. Som et andet eksempel kan nævnes, at den karakteristiske klang, man kender fra et steelband, skyldes olietønders stærkt afvigende partialtonespektrum.

En tones ro og renhed afhænger altså både af grundfrekvensen og den partialtonespektrum. Den menneskelige stemme fremviser et temmelig rent partialtonespektrum, som let ses ved en real time FFT analyse med Loggerpro eller endnu bedre med Realtimeanalyser Light [XXX]. Eventuelle afvigelser gør, at man for at fremkalde en illusion af samme grundtone må intonere anderledes på et "U" (meget grundtone, kun partialtoner med lave numre) end på et "I" (særlig mange partialtoner omkring 2700 Hz, uanset grundtone) eller på et "ARH" (ligesom i "far"; det giver stort set alle partialtonerne). Betydningen af partialtonerne må ikke undervurderes, da grundtonen på mange instrumenter ofte er meget svag, og fordi øret selv frembringer fx grundtonen som differensstone mellem overtonerne. Hvis man fx synger en tone på 100 Hz i en mobiltelefon, vil modtageren også sanse denne tone, på trods af at ingen toner med frekvenser lavere end 400 Hz kan transmitteres fra sender til udgangshøjttaleren hos modtageren. Fænomenet er kendt under navnet **"Missing Fundamental"** (søgeord). Modtageren frembringer altså selv grundtonen på 100 Hz ved harmonisk forvrængning ud fra de transmitterede toner på 400 Hz, 500 Hz, 600 Hz, osv.

Partialtonespektret over en grundtone C er: 1:C (prim), 2:C (oktav), 3:G (kvint), 4: C (oktav), 5: E (terts), 6: G (kvint) 7: Nærmest Bb (naturseptim), 8: C (oktav), 9: D (sekund), 10: E (terts).

Differenstoner i musikken

Når man lytter til to toner på en gang med frekvenser f_1 og f_2 , vil differenstonen med frekvensen $|f_2 - f_1|$ oftest være den mest fremtrædende blandt de kombinationstoner, der opstår pga. mellemørets harmoniske forvrængning. Hvis frekvensforholdet for to toner er rationalt $f_2 / f_1 = p / q$ (antag brøken uforkortelig), så vil de to toner begge være partialtoner for en fælles grundtone med frekvens $f_0 = \frac{1}{q} f_1 = \frac{1}{p} f_2$. Differenstonens frekvens er da partialtonen med nummer $|p - q|$ regnet ud fra denne fælles grundfrekvens

$$f_2 - f_1 = (p - q)f_0$$

Det betyder, at differenstonen harmoniserer med de to givne toner. Hvis man kigger på naturtonespektret figur 17, kan man få følgende akkorder frembragt af to toner sammen med deres differensstone, som er angivet i bassen:

Differenstoner for rene intervaller

Piano

Kvint: C(2)G(3) giver grundtonen C(1). Tilsammen danner de en tom akkord (som hverken har tonekønnet dur eller mol).

Kvart: G(3)C(4) giver samme tomme akkord.

Terts: C(4)E(5) giver sammen med differenstonen C(1) en durklang uden kvint.

Lille tert: E(5)G(6) giver sammen differenstonen C(1) en fuld durtreklang.

Lille sekst: E(5)C(8) giver sammen differenstonen G(3) en fuld durtreklang.

Stor sekst: G(3)E(5) giver sammen differenstonen C(2) en fuld durtreklang.

Stor decim: C(2)E(5) giver sammen differenstonen C(3) en fuld durtreklang.

Lille decim: E(5)G(12) giver sammen med differenstonen Bb(7) en naturseptimakkord. Differenstonen ligger en oktav lysere end angivet. En alternativ kombinationstone kunne være $1 \cdot f_1 - 2 \cdot f_2 = 12f_0 - 2 \cdot 5f_0 = 2f_0$, som kan tilføje C(2) til akkorden.

Det interessante ved disse overvejelser er bl. a., at vi åbenbart får mere ”klang” ved at bruge den lille tert eller sekster i stedet for den store tert.

I Chopins Nocturne i G-dur, opus 37#2 er det netop de små tertser og seksterne i højre hånd, der bærer den klanglige skønhed (de få bærende, store tertser er pakket ind i molakkorder):

113

Edited and fingered by
Rafael Joseffy

Nocturne

F. Chopin. Op. 37, No 2

Andantino

dolce

legato *

Copyright, 1915, by G. Schirmer, Inc.
Copyright renewed, 1943, by G. Schirmer, Inc.

41284

Naturseptimen

Den moderne septim Bb ligger 1000 cent over C (200 cent under det høje C). Den rene septim Bb_{ren} ligger derimod en anelse højere, nemlig 1018 cent over C. På figur 11 ser man, at den ligger en ren tert under D, en ren kvint over Eb og en ren molterts over G og vil således fungere harmonisk rent i fx g-mol eller Eb -dur. Dens frekvensfaktor findes ved at aflæse koordinaterne (2,-1) og derpå udregne $3^2 \cdot 5^{-1} = 9/5$, og heraf findes toneafstanden fra C

$$I(C, Bb_{\text{ren}}) = 1200\text{cent} \cdot \log_2\left(\frac{9}{5}\right) \approx 1018\text{cent}.$$

Kigger vi på naturtonespektrets partialtoner, passer en del af dem ind i buketten af "rene" toner fra figur 11. Der er 1(prim,C), 2(oktav,C), 3(kvint,G), 4(oktav,C), 5(terts,E), 6(kvint,G), 8(oktav,C), 9(sekund,D), 10(terts,E), 12(kvint,G), 15(stor septim,B), 16(oktav,C), 18(sekund,D), 20(terts,E), 24(kvint,G), 25(tritonus, $G\sharp$), 30(stor septim,B), 32(oktav,C), 36(sekund,D), 40(terts,E), 45(Forst. kvart, $F\sharp$), 48(kvint,G), 50(tritonus, $G\sharp$), osv.

De ti første giver næsten hele den diatoniske skala (de hvide tangenter på nær A og B). Vi benytter hertil kun de tal, som er multipla af 2, 3 og 5. Her kommer B (læs H!) ind som nummer 15, mens A slet ikke fremkommer på denne måde; dog kommer der en tone A_0 som nummer 27 med koordinaterne (3,0), som er et syntonisk komma lysere end det rene A.

Vi har altså blandt andet sprunget primumtallet 7 over, ja faktisk har vi oversprunget alle tal som indeholder primtallene 7, 11, 13, 17 osv. Nu er 7 det laveste primtal, som er sat "ud i kulden". Der er trukket en streg i sandet, men det kan jo altid diskuteres, om det er et korrekt valg, så lad os derfor ligge nærmere på partialtone nummer syv. Tonen Bb_{natur} kaldes *naturseptimen*. Frekvensfaktoren fra C op til Bb er $7/4$, hvilket er et meget lavt tal, som det fremgår af følgende udregning:

$$I(C, Bb_{\text{natur}}) = 1200\text{cent} \cdot \log_2\left(\frac{7}{4}\right) \approx 969\text{cent}$$

Den er imidlertid en "let tilgængelig" partialtone; fx kan man på en trompet med lethed blæse denne naturtone Bb_{natur} mellem det høje G og det endnu høje C. Alene af den grund indgår naturseptimen ofte i ældre musik hvor frembringelsen af toner i høj grad hvilede på partialtonerne, idet man anvendte horn uden ventiler. Den store brug af partialtonerne med numrene 2,3,4,5,6,8,9,10 gør at man ofte kommer til utilsigtet at "bøffe" igennem med nummer 7. Lyt til [14].

Til trods for at naturseptimen passer dårligt ind i vores toneskala og med rette udelades, er der situationer, hvor den passer fint ind. Se på følgende akkorder dannet af tonepar med deres tilhørende differenster:

Ren lille terts og septimterts

The image shows two musical staves for piano. The first staff shows a triad in Eb major (C4, Eb4, G4) with labels 'Ren, lille terts' and 'Fuld Eb-dur treklang'. The second staff shows a triad in Bb major (C5, Bb5, D6) with labels 'Lille terts, øverste tone Bb meget mørk' and 'Septimakkord uden kvint'. Both chords are marked with 'Piano' and have fingerings indicated by numbers 1, 5, 6, and 7.

Hvis de to toner spilles som en ren lille terts med frekvensforhold 6/5 (svarende til 316 cent), hører toneparret GB $\flat$ hjemme i en Eb-dur akkord med grundtonen Eb som differenstone. Hvis den øverste tone spilles mørkere, så frekvensforholdet sænkes til 7/6 (svarende til 267 cent), hører toneparret GB $\flat$ derimod hjemme i en C7-akkord med grundtonen C som differenstone.

Det virker ikke lovende at en så lav tone som B $\flat$ _{natur} skulle kunne fungere og det er forståeligt, at man på forhånd afviser værdien af denne mulighed.

Men lad os se på violinsoloen fra Vivaldis Årstiderne, efterårsatsen La Caccia:

Autunno, differenstoner A. Vivaldi

Violinen har solo med dobbeltgrebene i diskant-nøglen. Bas-nøglen viser de tilhørende differenstoner, som opstår i øret. Spiller man rent med de angivne frekvensforhold, hører man tydeligt differenstonerne, når man står med ørerne lige ned i violinen. For det første kan det i sig selv fungere som en intonationskontrol. For det andet har jeg antydnet valget 7/6 for den lille terts i den femte og sjette takt. Det giver en række af differenstoner F C F C F..., der fungerer harmonisk korrekt som bastoner i modsætning til en ren lille terts, som ville give et Eb som differenstone. Satsen ville i så fald få en modalharmonik med akkorderne F Eb F Eb F... i den pågældende takt. Det ville lede fornemmelsen væk fra italiensk efterår til skotsk folkemusik (som der i øvrigt ikke er noget i vejen med!).

Det fungerer altså harmonisk her at anvende naturseptimen. Lad os se på, hvordan det fungerer melodisk. Melodien er den øverste stemme og siger A B $\flat$ A B $\flat$ A. Lad os beregne halvtoneintervallets størrelse, først med brug af renstemning. På figur 11 ses, at vektoren fra A til B $\flat$ har koordinaterne (3,-2) svarende til en frekvensfaktor $3^3 \cdot 5^{-2} = 27/25$, hvilket svarer til 133 cent ifølge udregningen

$$I(A, Bb_{\text{ren}}) = 1200\text{cent} \cdot \log_2\left(\frac{27}{25}\right) \approx 133\text{cent}$$

Det fungerer ikke melodisk med et så stort halvtoneinterval.

Med C som udgangstone vil A have frekvensfaktoren $5/3$ og Bb_{natur} frekvensfaktoren $7/4$. Det første tal fremkommer ved aflæsning af koordinaterne $(-1,1)$ for A på figur 11. Det andet tal er blot frekvensfaktoren 7, som er sat to oktaver ned. Toneafstanden findes nu som

$$I(A, Bb_{\text{natur}}) = 1200\text{cent} \cdot \log_2\left(\frac{7/4}{5/3}\right) \approx 84,5\text{cent}$$

Denne toneafstand er kun 5 cent mindre end et pythagoræisk halvtoneinterval på 90 cent og fungerer derfor fint melodisk. Brugen af naturseptimen fungerer altså *både harmonisk og melodisk* i dette eksempel.

Tilståelser

Jeg har kun beskæftiget mig med durtreklange. Erfaring fra mange års korsang fortæller, at intonationsjusteringer kun sjældent finder sted, når det drejer sig om moltreklange. Jeg tror ikke, at de a priori bliver sunget renere, men snarere at der er tale om at høresansen er langt mere tolerant over falskhed i en moltreklang end i en durtreklang. Nu er det et fysisk faktum, at naturtonespektret er en durklang på grund af partialtone nummer 5. Et halvåbent rør har endda kun de ulige partialtoner (panfløjter, zampoña, gedakt-orgelpiber, ølflaske) og har derfor en meget ”duragtig” klang, idet allerede partialtonerne 1, 3 og 5 er en durtreklang. Faktisk forekommer moltreklange slet ikke i naturtonespektret.. Før renæssancen var mol det fortrukne tonekøn, hvilket passer med, at pythagoræiske durtreklange er uskønne. Jeg har ingen anelse om, hvorfor det forholder sig sådan. Mysteriet forstærkes af, at øret er meget kritisk over for den store terts, fx CE, hvis den er del af en durklang CEG. Hvis den samme store terts CE derimod er en del af en moltreklang ACE, er tolerancen stor.

Afsluttende bemærkninger

Keyboardstemnings betydning for vores tonesystem er af stor betydning af flere grunde. Dels har keyboard i sig selv altid været et meget anvendt instrument, dels er det et værktøj for komponister; musikken fødes ganske enkelt på klaveret. Vi ved naturligvis, at Mozart komponerede hele værker i hovedet, men kilden til lyd og den følelsesmæssige tilknytning til tonearter var allerede etableret hos ham inden da. Orkestre, kor og kammermusikensembler uden klaver er naturligvis frit stillet til hele tiden at intonere efter forholdene. Moderne synthesizer udstyr kan momentant renstemme alle klange, men problemet er at man ikke entydigt kommer tilbage til samme udgangspunkt efter at have moduleret frem og tilbage i kvintcirklen. Endelig slipper vi - uanset instrument - ikke for konflikten mellem melodi og harmoni. Disse var ordene og tonerne.

Appendiks

A. Tabel over toneafstande i en klassisk temperering med 7 rene kvinter

I wordudgaven kan tabellen aktiveres som et Excel regneark, og man kan ændre kvintstørrelserne.

Ordnet i kvintrækkefølge:

7 Store kvinter 702,0

5 Små kvinter 697,3

Matricen er antisymmetrisk modulo 1200

Toneafstand:

fra\til	E b	B b	F	C	G	D	A	E	B	F $\sharp$	C $\sharp$	G $\sharp$
E b	0	702	204	901	398	1096	593	90	792	294	996	498
B b	498	0	702	199	896	394	1091	588	90	792	294	996
F	996	498	0	697	195	892	389	1086	588	90	792	294
C	299	1001	503	0	697	195	892	389	1091	593	95	797
G	802	304	1005	503	0	697	195	892	394	1096	598	100
D	104	806	308	1005	503	0	697	195	896	398	1100	602
A	607	109	811	308	1005	503	0	697	199	901	403	1105
E	1110	612	114	811	308	1005	503	0	702	204	906	408
B	408	1110	612	109	806	304	1001	498	0	702	204	906
F $\sharp$	906	408	1110	607	104	802	299	996	498	0	702	204
C $\sharp$	204	906	408	1105	602	100	797	294	996	498	0	702
G $\sharp$	702	204	906	403	1100	598	95	792	294	996	498	0

Ordnet i kromatisk rækkefølge:

7 Store kvinter 702,0

5 Små kvinter 697,3

Matricen er antisymmetrisk modulo 1200

Fra\Til	C	C $\sharp$	D	E b	E	F	F $\sharp$	G	G $\sharp$	A	B b	B
C	0	95	195	299	389	503	593	697	797	892	1001	1091
C $\sharp$	1105	0	100	204	294	408	498	602	702	797	906	996
D	1005	1100	0	104	195	308	398	503	602	697	806	896
E b	901	996	1096	0	90	204	294	398	498	593	702	792
E	811	906	1005	1110	0	114	204	308	408	503	612	702
F	697	792	892	996	1086	0	90	195	294	389	498	588
F $\sharp$	607	702	802	906	996	1110	0	104	204	299	408	498
G	503	598	697	802	892	1005	1096	0	100	195	304	394
G $\sharp$	403	498	598	702	792	906	996	1100	0	95	204	294
A	308	403	503	607	697	811	901	1005	1105	0	109	199
B b	199	294	394	498	588	702	792	896	996	1091	0	90
B	109	204	304	408	498	612	702	806	906	1001	1110	0

B. Oversigt over skalaer i den pytagoræiske stemning

[illegible]

C. Oversigt over skalaer i middeltonestemningen

[illegible]

Litteratur

Litteraturen er ofte modstridende. Ældre udgaver af The Grove Concise Dictionary of Music fremstiller klassiske tempereringer som fejlslagne forsøg på at tilnærme den moderne, ligesvævende temperering. Et væld af bøger har ar fra denne opfattelse, herunder Den store danske encyklopædi. Til et gymnasiebibliotek/ studiecenter kan jeg anbefale at anskaffe [1], [3], [4], [9] og [11].

- [1] David J. Benson: Music - A Mathematical Offering, Cambridge University Press 2007.
- [2] J. Murray Barbour: Tuning and Temperament – a historical survey, Dover Publication, Inc. 2007
- [3] Hans Buhl: Sfærernes Harmoni, Steno Museets Venner 2000
- [4] Ross W. Duffin: How Equal Temperament Ruined Harmony (and Why You Should Care), W. W. Norton & Company 2007.
- [5] Bjørn Grøn: Fra græsk geometri til moderne algebra.
www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsforloeb/paradigmatiske/not/n314.doc
- [6] Hardy & Wright: The Theory of Numbers, Oxford 1939
- [7] Owen Jorgensen: Tuning. Containing the perfection of eighteenth-century temperament, the lost art of nineteenth-century temperament, and the science of equal temperament, complete with instructions for aural and electronic tuning. East Lansing: Michigan State University Press, 1991.
- [8] S. Miller et al.: An Invitation to Modern Number Theory. Princeton University Press, 2006.
- [9] Gareth Loy: Musimathics - The mathematical Foundations of Music, Vol. 1+2, MIT Press 2006.
- [10] Jesper Lützen: Cirkelns kvadratur, vinklens tredeling og terningens fordobling, Systime 1993
- [11] Asmus Schmidt: Kædebrøker, Gyldendal 1967
- [12] <http://www.youtube.com/watch?v=tbvLNH6FI>, Klassisk temperering af cembalo (1/6 komma) præludium i C og i B (H) fra WTK1, Bradley Lehman, meget interessant side.
http://www.youtube.com/watch?v=E9IqD_04G0s, Om stemning af cembalo af Bradley Lehman
<http://www.youtube.com/watch?v=34oglw7kiJc&NR=1>, Med musik af Purcell
<http://www.larips.com/>, Bradley Lehmans hjemmeside.
- [13] Dansk orgelmusik i 400 år, S-I. Mikkelsen, bl. a. på Compeniusorglet, CLASSCD 528-30.
- [14] Om at få det til at stemme: Cd med foredrag af Peer Kjær Andersen. Om pythagoræisk stemning, ren stemning, middeltonestemning og moderne, ligesvævende stemning (intet om klassiske tempereringer), Stenomuseet 1999
- [15] Das Wohltemperierte Klavier I+II med Zuzana Ruzickova er indspillet på cembalo stemt i Niedhardt temperering fra 1729.
- [16] A Temperamental Journey: Tre CD'er med optagelser fra symposium om keyboardstemning med Owen Jorgensen, se www.ptg.org
- [17] The historic organ. The Compenius Organ at Frederiksborg Castle, Per Kynne Frandsen, Dacapo 1996

Der er et væld af danske indspilninger med klassisk temperering. Jeg kan anbefale Cd'er og levende koncerter med Lars Ulrik Mortensen, cembalist og dirigent for det danske ensemble Concerto Copenhagen.

Gode internetsider og søgeord på nettet: Historical tuning, mean tone intonation, just intonation, equal -/ Kirnberger III -/ Werckmeister -/ Francesco Vallotti -/ Thomas Young - / Niedhardt temperament, basilar membrane, cochlea animation, pitch perception, missing fundamental

<http://home.earthlink.net/~kgann/histune.html>, glimrende side af Kyle Gann.

<http://campus.murraystate.edu/staff/scott.thile/research/unequal/index.htm>, gode slides.

<http://www.mmdigest.com/Tech/jorgensen.html>, om bl. a. Owen Jorgensens TUNING.

www.bach-cantatas.com/Articles/Das_Wohltemperirte_Clavier.htm, om Bach-tuning.

www.ymec.com/products/rale Download Realtime Analyzer Light, to-kanal tonegenerator, hurtig realtime FFT analysator, gratis prøveversion.

Jens Ulrik Lefmann ju@birke-gym.dk, der er lektor i matematik og fysik på Birkerød Gymnasium og ekstern lærer i fysik på DTU, har holdt en række foredrag om temperering af keyboard og tonal musikalitet bl. a. på DTU, RUC og i UNF. Diverse stemninger demonstreres med musikeksempler på digitalklaver.

