

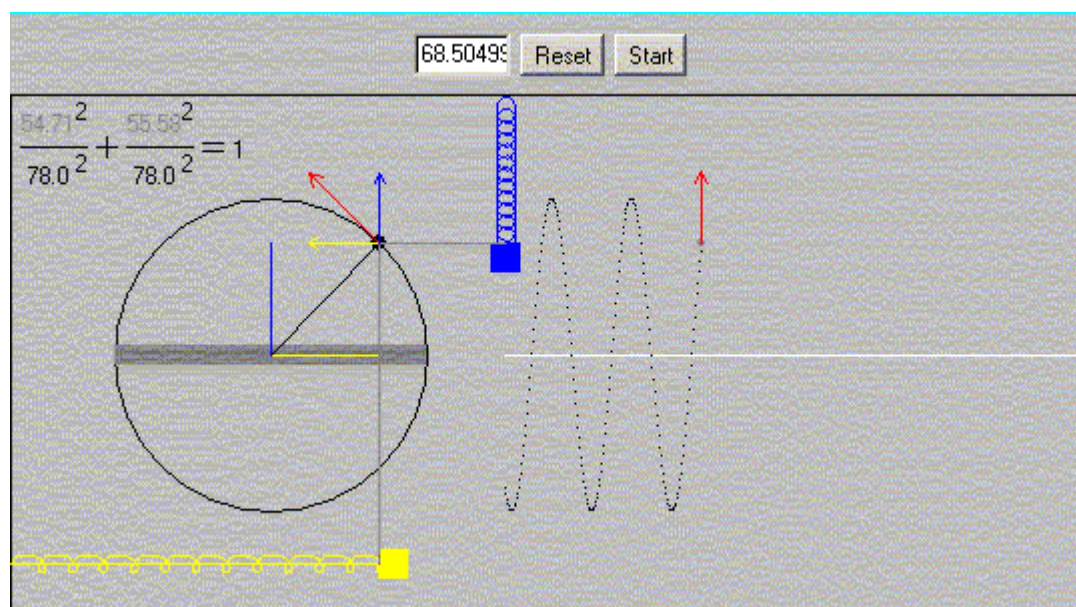
## Bølgeudbredelse.

Vi har i indledning til optik set eksempler på bølgebevægelse. Der er generelt to former for bølger:

- **Longitudinale bølger** eller længdebølger, hvor bølgen svinger i bevægelsesretningen. De optræder når en fjeder med et lod svinger op og ned (fig. 1), eller hvis lyd udbreder sig i luft, hvor det er molekylerne der skubber til hinanden, som i en harmonika.

Se følgende animation af Fu Kwun Hwuang, der viser en fjeder der er ophængt og som svinger harmonisk. Med højre museknap kan animationen stoppes.

- <http://www.toender-gym.dk/mbs/fysik/ntnujava/shm/shm.html>



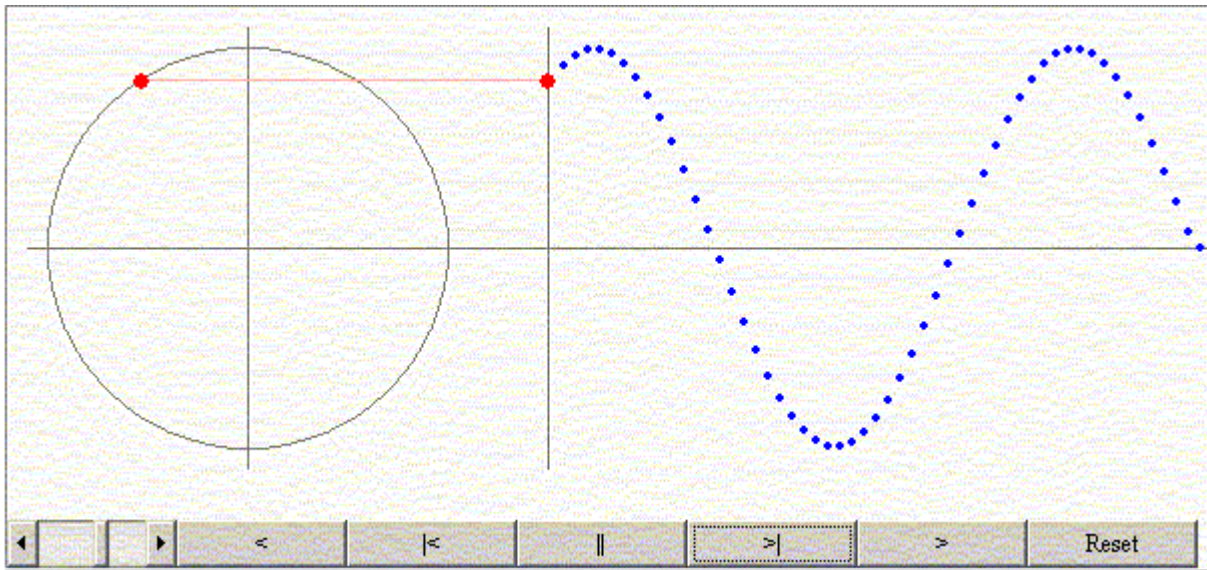
Figur 1. Dette billede viser at når en partikel (sort) bevæger sig rundt i en cirkel, svarer det til to fjedre der hver især udfører en harmonisk svingning. Den røde pil til højre angiver hele tiden den blå fjeders position. Fjedrene udfører longitudinale svingninger da de svinger i bevægelsens retning.

Den anden type bølger er:

- **Transversale bølger**, hvor bølgen svinger vinkelret på bevægelsesretningen. Et eksempel er EM-bølger eller vandbølger der ruller ind fra havet.

Her er en lille animation af NoriMari (fig. 2), som viser hvordan en transversal bølge frembringes.

- <http://www2.biglobe.ne.jp/~norimari/science/JavaEd/e-wave1.html>



Figur 2. Det røde punkt (i midten) svinger op og ned medens bølgen udbreder sig til højre. Svingningen er vinkelret på udbredelsesretningen og den kaldes for en transversal bølge.

### Bølgefunktioner.

Lad os beskrive bølgerne lidt mere matematisk. En bølge der bevæger sig fremad i x-aksens retning, kan beskrives ved en funktion af sted  $x$  og tid  $t$ :

$$f_1(x, t) = A \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) \quad \text{OPT(2.1)}$$

Her er  $A$  **amplituden**,  $\omega$  er den **cykliske frekvens**, som er bestemt ved frekvensen  $f$ :

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad \text{OPT(2.2)}$$

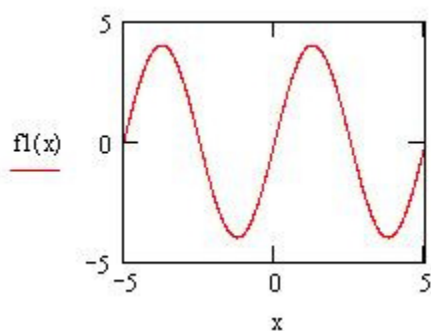
Desuden er  $k$  **bølgetallet**:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \quad \text{OPT(2.3)}$$

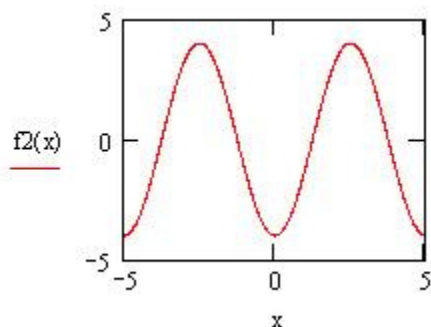
som også kan skrives ved hjælp af bølgens fart  $v$ :

$$k = \frac{\omega}{v} \quad \text{OPT(2.4)}$$

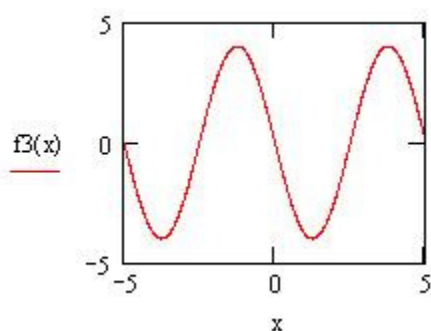
På figur 3 ses øjebliksbilleder af en fremadskridende bølge for fem forskellige tidspunkter.



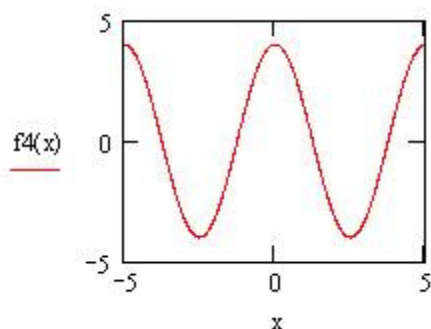
Figur 3. En fremadskridende bølge med frekvens på 2 Hz, periode på 0,5 s og en bølgelængde på 5 m. Farten er da 10 m/s. Amplituden er 4. Den første funktion  $f_1(x)$  viser bølgen til tiden lig med nul.



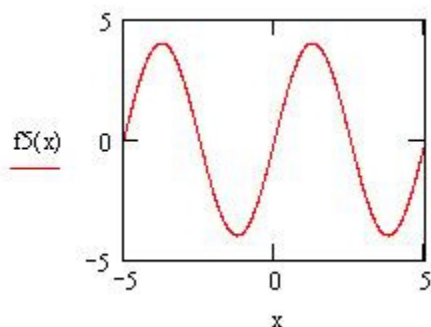
Bølgen efter en kvart periode. Bølgen bevæger sig mod højre.



Bølgen efter en halv periode. Bølgen har nu bevæget sig præcis en halv bølgelængde.



Bølgen efter trekvart periode.



Bølgen efter en hel periode. Bølgen har bevæget sig en hel bølgelængde.

Stående bølger.

Hvis en bølge løber i modsat retning er funktionen:

$$f_2(\mathbf{x}, t) = A \cdot \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega \cdot t) \quad \text{OPT(2.5)}$$

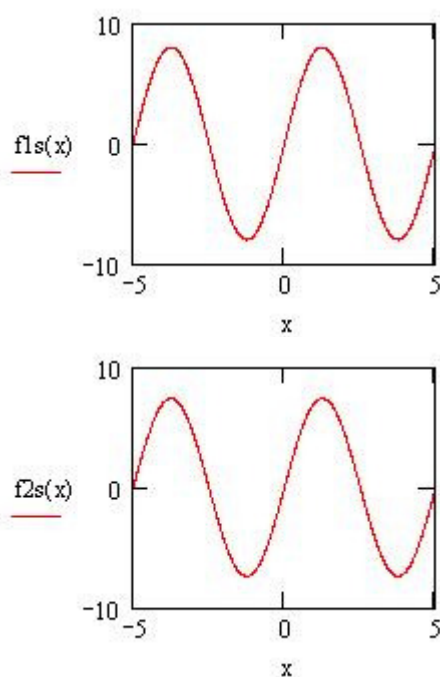
Hvis vi nu tager både en bølge der løber fremad og en der løber tilbage får vi følgende resultat:

$$\begin{aligned} f_s(\mathbf{x}, t) &= f_1(\mathbf{x}, t) + f_2(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \\ f_s(\mathbf{x}, t) &= 2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \end{aligned} \quad \text{OPT(2.6)}$$

Der er nu fremkommet hvad man kalder for en stående bølge, hvor amplituden er moduleret med tiden.

Her er en lille animation af NoriMari, som viser hvordan en stående bølge frembringes. Det ses at bølgen faktisk ikke bevæger sig hverken til højre eller til venstre. På figur 4, ses nogle øjebliksbilleder af en stående bølge.

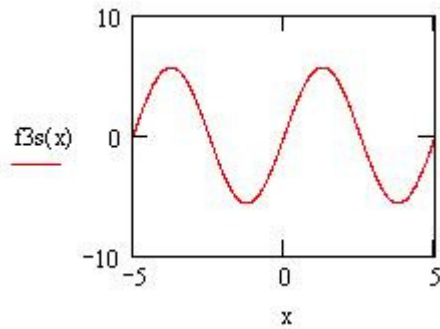
- <http://www2.biglobe.ne.jp/~norimari/science/JavaEd/e-wave4.html>



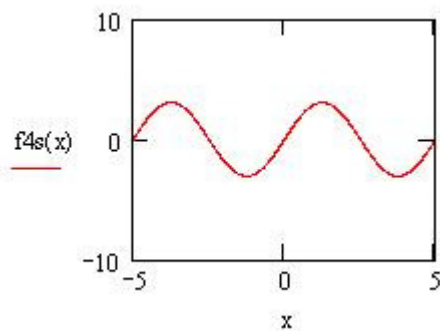
Figur 4. Billedet viser den stående bølge til tiden  $t = 0$ . Bølgelængde, frekvens, periode og amplitude er som på figur 3.

Til dette tidspunkt er de to oprindelige bølger i fase med hinanden og de vil forstærke hinanden. Såkaldt konstruktiv interferens.

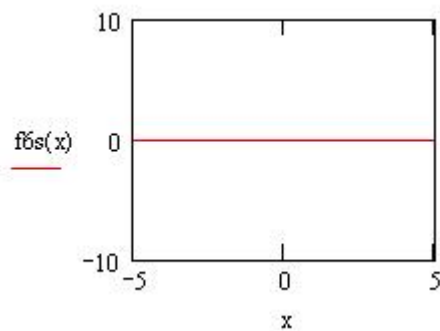
Den samme bølge efter en tiden  $t = T/16$ . Det ses at bølgen ikke bevæger sig frem eller tilbage, men amplituden forminskes.



Den samme bølge efter en tiden  $t = T/8$ .



Den samme bølge efter en tiden  $t = 3 \cdot T/16$



Den samme bølge efter en kvart periode.  
Bølgen er nu udslukket.

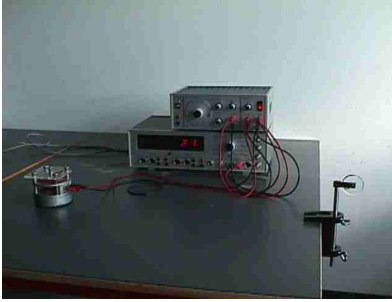
De to oprindelige bølger er nu ude af fase med hinanden og de har slukket hinanden.  
Det kaldes for destruktiv interferens.

### Den svingende streng.

Stående bølger optræder når en guitarstreng eller klaverstreng bliver anslået. Det kan iagttages ved forsøg (fig. 5a) med en fiskesnøre af længde  $L$ , der spændes op og tilsluttes en vibrator. Det er dog en forudsætning at der er et helt antal halve bølgelængder på strengen, ellers vil strengen ikke vibrere. Det kaldes for **resonansbetingelsen** for en lukket streng eller rør.

$$\mathbf{n \cdot \frac{\lambda}{2} = L, \quad n = 1, 2, \dots}$$

OPT(2.7)



Figur 5a. En fiskesnøre opspændt giver anledning til en stående bølge, hvis den ydre frekvens rammer resonansfrekvensen. Hvis man benytter en stroboskoplampe, med samme frekvens, vil bølgen se ud som om den står fast.

Resonansbetingelser har også stor betydning i atomernes verden. Her er der kun visse baner eller orbitaler (s, p, d) der er tilladte. Det svarer til en kvantiseringsbetingelse. Hver orbital svarer til et helt antal bølgelængder og det blev brugt af Bohr i 1913 til at bestemme Hydrogenatomets energiniveauer.

I elementarpartiklernes verden er der en række partikler kaldet mesoner ( eksempler er  $\pi^-$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^+$  der er de letteste og  $K^0$ ,  $K^+$  der er noget tungere) der består af et quark-antiquark ( $q_i\bar{q}_j$ ) par.

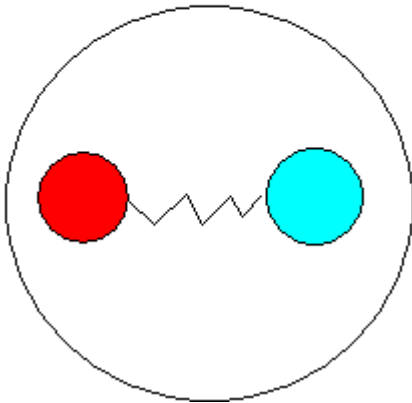
Hver af disse sidder nu for hver sin ende af en lille streng (fig. 5b), og de forskellige partikler svarer til en resonansbetingelse. De anslåede tilstande svarer til at strengen vibrerer mere og det betyder at de anslåede tilstande har større masse og dermed energi. Strengteorien har været kendt i over 30 år for mesoner og hadroner (eksempler er protonen og neutronen) og blev udviklet af blandt andre vores alle Holger Bech Nielsen og Poul Olesen i 60'erne.

Problemet er at for det giver mening, må mesonerne leve i præcis 26 dimensioner. Det er ret vildt, eftersom vi lever i blot fire dimensioner, tre rumlige og en tidslig. Superstrengteorien er af nyere dato blev udviklet i 80'erne af Michael Green og John Schwartz.

I strengteorien opfattes alle partikler som om de bestod af små strenge, men med en afsindig lille udstrækning kaldet Planck-længden. For at denne teori skal give mening, må man have 10 dimensioner. De små strenge er nu rullet op (lukkede strenge) i de seks dimensioner, som vi ikke ser. Det er utroligt matematisk og de fleste fysikere er for længst stået af.

meson med

$u_R u_{\text{anti-R}} = u_R u_{\text{cyan}}$



Figur 5b. En meson består af et quark-antiquark par som er bundet sammen med en lille streng. Denne streng er også en partikel og kaldes for en gluon. Denne gluon er ansvarlig for kernekraften, som er langt stærkere end den elektriske frastødning. Grundtilstanden er pi-mesonerne der svarer til at strengen er i hvile. Når strengen vibrerer kan man opnå andre mesoner som K-mesonerne med højere energi.

### Orgelpiber.

Resonans kan også opstå i halvlukkede rør som en **orgelpibe**. Det kan iagttages ved forsøg med et resonansrør (fig. 6). Resonansbetingelsen er lidt anderledes:

$$(2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} = L, n = 0, 1, 2, \dots$$

OPT(2.8)

Der skal altså være et helt antal kvarte bølger i orgelpiben for at der er resonans.



Figur 6. I resonansrøret er der vand forbundet til en slange med en flaske. Foroven er der anbragt en stemmegaffel med kammertonen A (440 Hz), der sættes i svingninger. Ved at flytte vandoverfladen op og ned til man hører at lyden er blevet forstærket kan man bestemme bølgelængden af lyden og dermed finde lydens hastighed i luft.

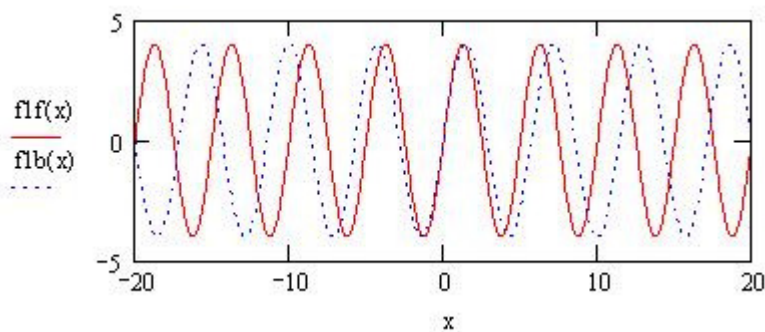
## Svævninger.

Lad os se lidt på hvordan man stemmer et instrument. Det gøres her ved at benytte to stemmegafler med en lidt forskellig frekvens og bølgelængde. Benyttes en mikrofon og et oscilloskop kan man let høre og se, at hvis de to frekvenser er tæt på hinanden opstår der stødtoner. Når de to frekvenser er afstemt, bliver tiden mellem stødtonerne meget lang. Instrumentet er stemt.

Matematisk benyttes summen af to bølger med den samme amplitude (se fig. 7):

$$f_s(x,t) = A \cdot \sin(k_1 \cdot x - \omega_1 \cdot t) + A \cdot \sin(k_2 \cdot x - \omega_2 \cdot t) \quad \text{OPT(2.9)}$$

Her er  $k_1$  og  $k_2$  bølgetallene for de to bølger og  $\omega_1$  og  $\omega_2$  er de cycliske frekvenser.



Figur 7. Billedet viser de to forskellige bølger som indgår i teksten til tiden lig nul. De to bølger er i fase med hinanden ved  $x$  lig nul, men er ellers ude af fase. Ved  $x$  lig 40 er bølgerne atter i fase. Amplituden er valgt til 4. De to frekvenser er valgt til  $f_1 = 2$  Hz og  $f_2 = 2,1$  Hz. Farterne af de to bølger er  $v_1 = 10$  m/s og  $v_2 = 12$  m/s.

Ved hjælp af additionssætninger for sinusfunktioner finder vi:

$$f_s(x,t) = 2 \cdot A \cdot \sin(k_m \cdot x - \omega_m \cdot t) \cdot \cos(\Delta k \cdot x / 2 - \Delta \omega \cdot t / 2) \quad \text{OPT(2.10)}$$

Her er det gennemsnitlige bølgetal:

$$k_m = \frac{1}{2} \cdot (k_1 + k_2) \quad \text{OPT(2.11)}$$

og den gennemsnitlige cycliske frekvens:

$$\text{OPT(2.12)}$$



$$\omega_m = \frac{1}{2} \cdot (\omega_1 + \omega_2)$$

Fasehastigheden er givet ved udtrykket:

$$v_f = \frac{\omega_m}{k_m}$$

OPT(2.13)

•

Indsættes værdierne af frekvenserne  $f_1 = 2$  Hz og  $f_2 = 2,1$  Hz og farterne af de to bølger er  $v_1 = 10$  m/s og  $v_2 = 12$  m/s, fås en værdi:

- $v_f = 10,93$  m/s.

Endvidere har vi indført forskellen mellem bølgetallene:

$$\Delta k = (k_1 - k_2)$$

OPT(2.14)

og forskellen mellem de cycliske frekvenser:

$$\Delta \omega = (\omega_1 - \omega_2)$$

OPT(2.15)

Gruppehastigheden eller hvor hurtigt maksimum af indhyldningskurven flytter sig er givet ved:

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$$

OPT(2.16)

Bølgen består altså af en harmonisk svingning (sinusfunktion), men overlejret med en cosinusfunktion (fig. 8). Vi siger at bølgen er blevet moduleret og at der er opstået svævninger eller stødtoner. En sådan type bølge kaldes også for en bølgepakke eller puls.

Vi finder at gruppehastigheden er:

- $v_g = -4$  m/s.

Vi ser at gruppehastigheden i dette regneeksempel er mindre end fasehastigheden. I almindelighed vil  $v_g$  være mindre end  $v_f$ .

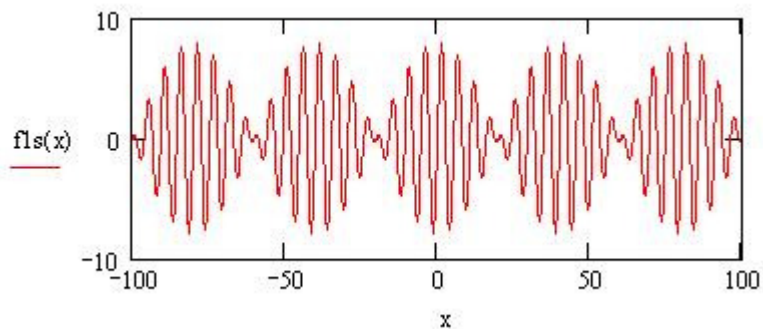
I **Lene Haus** berømte forsøg er hendes resultater blevet udlagt som om at det var lyshastigheden der var blevet nedsat. Det er et forkert billede, som vi vil uddybe senere i kapitlet om atomfysik.

Det hun har vist er, at når en puls fra et laserbeam sendes ind i en sky af natriumatomer ved meget lav temperatur 435 mK, vil pulsens gruppehastighed være nedsat til 17 m/s.

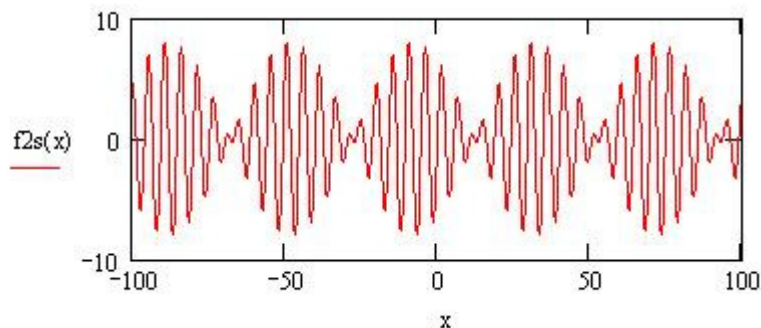
Havde hun derimod sendt et laserbeam ind med en bestemt bølgelængde, ville lysets fart være uforandret, da brydningsforholdet for natriumatomerne er tæt på 1.

Med andre ord:

- *Lyshastigheden eller fasehastigheden er ikke nedsat, men derimod gruppehastigheden af en puls med forskellige bølgelængder.*



Figur 8. Den samlede bølge til tiden lig nul. Det er tydeligt at bølgen er blevet indhyllet eller moduleret. Læg også mærke til at bølgelængden er meget større end før.



Figur 9. Den samme bølge men til tiden fire gange T. Det er tydeligt at bølgen har flyttet sig.

## Gruppehastighed.

Vi vil nu se lidt mere på gruppehastigheden for lys og udlede et udtryk der afhænger af lysets brydningsforhold (se næste kapitel).

For lys der går gennem et prisme med brydningsforhold  $n > 1$ , vil fasehastigheden være reduceret med  $n$  altså:

$$\mathbf{v}_f = \frac{\omega}{\mathbf{k}} = \frac{c}{\mathbf{n}}$$

OPT(2.17)

Det generelle udtryk for gruppehastigheden er:

$$\mathbf{v}_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = \frac{d}{d\mathbf{k}}(\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{k})$$

OPT(2.18)

Ved differentiation med hensyn til  $\mathbf{k}$  fås:

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_f + \mathbf{k} \cdot \frac{d\mathbf{v}_f}{d\mathbf{k}}$$

OPT(2.19)

Det er praktisk at skifte differentiation med hensyn til  $\mathbf{k}$  ud til differentiation med  $\omega$ . Vi finder:

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_f + \mathbf{k} \cdot \frac{d\mathbf{v}_f}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$$

OPT(2.20)

eller

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_f + \mathbf{k} \cdot \frac{d\mathbf{v}_f}{d\omega} \cdot \mathbf{v}_g$$

OPT(2.21)

Vi isolerer gruppehastigheden og når da:

$$\mathbf{v}_g = \frac{\mathbf{v}_f}{1 - \mathbf{k} \cdot \frac{d\mathbf{v}_f}{d\omega}}$$

OPT(2.22)

Benyttes definitionen for fasehastigheden finder vi:

$$\frac{d\mathbf{v}_f}{d\omega} = -\frac{c}{n^2} \cdot \frac{dn}{d\omega}$$

OPT(2.23)

Indsættes dette resultat i gruppehastigheden fås:

$$\mathbf{v}_g = \frac{\mathbf{v}_f}{1 + \mathbf{k} \cdot \frac{c}{n^2} \cdot \frac{dn}{d\omega}}$$

OPT(2.24)

Og indføres hvad  $k$  er reduceres udtrykket til:

$$v_g = \frac{v_f}{1 + \frac{\omega}{n} \cdot \frac{dn}{d\omega}}$$

OPT(2.25)

eller:

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \cdot \frac{dn}{d\omega}}$$

OPT(2.26)

Vi har nu tre tilfælde:

$$\frac{dn}{d\omega} = 0$$

OPT(2.27)

altså at brydningsforholdet er uafhængig af frekvensen. I dette tilfælde er gruppehastigheden og fasehastigheden ens. Det ville svare til at vi ikke havde en regnbue, altså at hvidt lys kun var hvidt og aldrig kunne splittes op i farver. Computerskærmen ville også kun have sort og hvid.

I det andet tilfælde har vi:

$$\frac{dn}{d\omega} > 0$$

OPT(2.28)

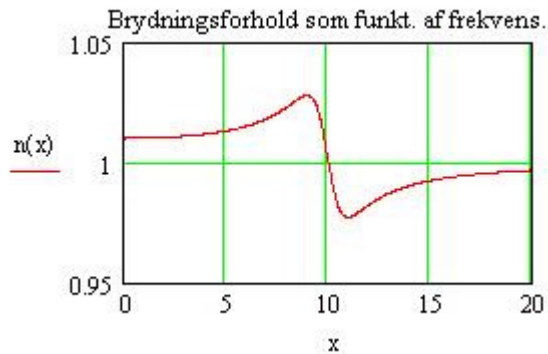
I dette tilfælde vil brydningsforholdet for lys vokse med stigende frekvens. Det er faktisk hvad man observerer og det giver anledning til lysets farver. Det kaldes for normal dispersion af lyset. I dette tilfælde er gruppehastigheden mindre end fasehastigheden.

Endelig det tredje tilfælde:

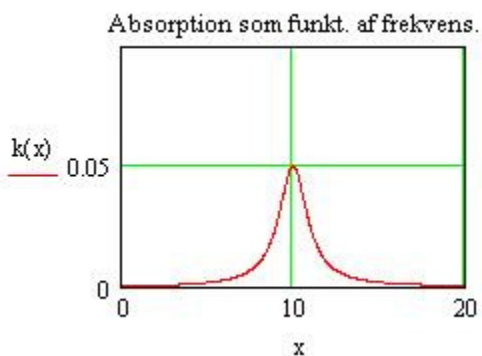
$$\frac{dn}{d\omega} < 0$$

OPT(2.29)

Her vil brydningsforholdet falde med stigende frekvens. Det kaldes for anormal dispersion og optræder ved absorption af lys i atomer. På figur 10 er der vist et typisk billede af brydningsforholdet som funktion af frekvensen omkring en tænkt absorptionslinje i et atom. Der er tale om en resonans



Figur 10. Et typisk billede af brydningsforholdet som funktion af frekvensen  $x$  omkring en absorptionslinje, der svarer til en resonans, ved  $x = 10$  Hz. Hvor grafen er voksende har vi normal dispersion og hvor grafen er aftagende har vi anormal dispersion.



Figur 10. Et typisk billede af absorptionen som funktion af frekvensen  $x$  omkring en absorptionslinje ved  $x = 10$  Hz. Det er tydeligt at absorptionen (ved resonansen) er størst ved  $x = 10$  og falder til begge sider.